Corrigé Partiel 2018

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4^2+1\times 2 & 4\times 1+6\times 1 \\ 2\times 4+2\times 6 & 2\times 1+6\times 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 20 & 38 \end{pmatrix}$$

- AB n'est pas calculable car A possède 3 colonnes et B 2 lignes

- BA non plus car B possède 2 colonnes et A 3 lignes.

2. Une base est une famille de vecteurs libre et génératrice.

3. Soit $\mathcal{E}=(e_1 \dots e_n)$ une base d'un espace vectoriel E.
alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe n scalaire $(u_1 \dots u_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$$

ces scalaires sont uniques, on les appelle coordonnées de u dans ~~l~~ la base $\mathcal{E}$.

On note alors $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$

4. Soit V un ensemble de vecteurs.
On appelle espace vectoriel engendré par V et on note $\operatorname{Vect} V$ l'ensemble $\operatorname{Vect} V = \{ \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_n v_n,\ (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (v_1 \dots v_n) \in V^n, n \in$

Autrement dit, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de V.

5. Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

6. L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y \ , \ 2(x+y))$

a pour image une droite : elle est de rang 1.

7. • 1 n'admet pas -1, son élément symétrique pour la loi $+$, dans $\mathbb{N}$.

$(\mathbb{N}, +)$ n'est donc pas un groupe.

8. Soient E et F deux espaces vectoriels de bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de dimensions p et n.
alors on définit la matrice de $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ par le tableau des coordonnées des $\phi(e_1) \dots \phi(e_p)$, $(e_1 \cdots e_p) \in \mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \vdots \\ \leftarrow f_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \phi(e_1) & \cdots & \phi(e_p) \end{array} & \end{array}$$

9. (a) La rotation $\mathcal{R}$ de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

(b) On choisit les bases $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

alors $\operatorname{mat}(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$\operatorname{mat}(\mathcal{R}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

N.B : Dans la base $\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$

on aurait $mat(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

10. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'application linéaire qui associe aux vecteurs e_i de l'ancienne base associe les vecteurs e'_i de la nouvelle base, représ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} e'_{11} & \cdots & e'_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ e'_{n1} & & e'_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} & \end{array}$$

10. Soient (a_{ij}) et (b_{ij}) deux matrices de tailles (n,p) et (p,m)

la matrice $(a_{ij}).(b_{ij}) = (p_{ij})$ est de taille

(n, m) avec $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

exercice 2 :

1. • $x \mapsto 0$ est solution de E donc $S_E \neq \emptyset$

• Soient f et g deux solutions de (E), et $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $(f+\lambda g)'' + (f+\lambda g) = \underbrace{f''+f}_{=0 \text{ car } f \in S_E} + \lambda \underbrace{(g''+g)}_{=0 \text{ car } g \in S_E}$

$= 0$

donc $f + \lambda g \in S_E$.

Donc S_E est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$ [comprendre $0_{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$]

alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda \cos x + \mu \sin x = 0$

or en particulier on peut évaluer en 0 et $\frac{\pi}{2}$, si bien que $\lambda = \mu = 0$

Donc $(\cos, \sin)$ forme une famille libre, elle est de taille 2 dans S_E de dimension 2, c'est donc une base.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \phi) = \cos x \cos \phi - \sin x . \sin \phi$

ainsi dans la base $\mathcal{B}(\cos, \sin)$, on a $\cos_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

on a pour matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}' = (\cos, \cos\phi)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cos\phi \\ 0 & -\sin\phi \end{pmatrix}$$

4. (a) Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$

soit $\lambda \in \mathbb{R}$

alors $d(f + \lambda g) = f' + \lambda g'$

$= d(f) + \lambda d(g)$

donc $D \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$

(b) • Soit $f \in S_E$ alors $(d^2 + I) f = 0$

donc $f \in \operatorname{Ker}(d^2 + I)$

donc $S_E \subset \operatorname{Ker}(d^2 + I)$

• réciproquement si $f \in \operatorname{Ker}(d^2 + I)$

alors $(d^2 + I) f = 0$

$\Leftrightarrow f'' + f = 0$

$\Leftrightarrow f \in S_E$

Donc $\operatorname{Ker}(d^2 + I) \subset S_E$

2. $f(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \varepsilon_1$

$f(\varepsilon_2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\varepsilon_2$

$f(\varepsilon_3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -\varepsilon_3$

Donc $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{E}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \varepsilon_1 \\ \leftarrow \varepsilon_2 \\ \leftarrow \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \end{array}$

3. ainsi $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

4. N^n représente f^n dans $\mathcal{B}$. Or on connaît ~~f~~ l'action de f^n sur ε_1, ε_2 et ε_3, on va donc décomposer (e_1, e_2 et e_3) dans cette base pour obtenir les colonnes de N^n :

$$\begin{cases} e_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\ e_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ e_3 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{cases}$$

donc $f^n(e_1) = f^n(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)$

$= f^n(\varepsilon_3) - f^n(\varepsilon_1)$ linéarité

$= (-1)^n \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ d'après (2)

$f^n(e_2) = f^n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$

$= f^n(\varepsilon_2) - f^n(\varepsilon_1)$ linéarité

$= 2^n \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ d'après (2)

$f^n(e_3) = f^n(2\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$

donc $\underline{\mathrm{Ker}(d^2+I) = S_E}$

ⓒ Dans la base (cos , sin) on remarque que

$$\begin{cases} d(\cos) = -\sin \\ d(\sin) = \cos \end{cases}$$

Donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

ⓓ $D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $D^2 + I_2 = 0$

Il est normal que la restriction de la ~~matrice~~ l'application $d^2 + I$ à son noyau soit nulle, donc que $D^2 + I_2 = 0$ car (cos, sin) engendre $\mathrm{Ker}(d^2+I)$.

exercice 3 :

1. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda \varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_3 = 0$

alors
$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\lambda + \nu = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu = 0 \\ -\nu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, elle est de taille 3 ~~donc~~ donc engendre $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

$$f^n(\varepsilon_3) = 2 f^n(\varepsilon_1) - f^n(\varepsilon_3)$$) linéarité

↓ d'après (i)

$$= 2\varepsilon_1 - (-1)^n \varepsilon_3$$

Il suffit alors d'écrire les coordonnées de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 dans les colonnes de N^n :

$$N^n = \begin{pmatrix} 2\times(-1)^n - 1 & 2^n - 1 & 2\left[1+(-1)^{n+1}\right] \\ 0 & 2^n & \\ (-1)^n - 1 & 2^n - 1 & 2 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$