L3 E3A Algèbre

TD1 : Espaces Vectoriels, vecteurs

Exercice 1 : Définition d'espace vectoriel

1. Rappelez la définition d'un espace vectoriel.
2. Prouvez que l'ensemble :
$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n | a_n \in \mathbb{K}, a_n \text{presque tous nuls} \right\}$$
des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Prouver que si U est un ensemble et n est un entier naturel non nul, alors l'ensemble $\mathcal{F}(U, \mathbb{K}^n)$ des fonctions de U dans $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel.

Exercice 2 : Prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$
2. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1 \right\}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | z(x^2 + y^2) = 0 \right\}$
4. $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0 \right\}$
5. $\left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 | \xi + \eta = 0 \right\}$

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel.

1. Rappelez la définition de sous-espace vectoriel de E.
2. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E ssi $F \in G$ ou $G \in F$.

Exercice 4 : Base et dimension

1. Soit E un espace vectoriel. Rappeler les définitions d'une base de E et de la dimension de E.
2. Soient
$$E = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0, x - 3z - t = 0 \right\}$$

(a) Montrer que E et F sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et déterminer leur dimension.
(b) Décrire les sous-espaces vectoriels $E \cap F$ et $E + F$. Déterminer leur dimension.

3. Donner une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 5 : Ecriture d'un élément de $\mathbb{R}^n$ comme $n-uplet$, matrice colonne d'un vecteur, coordonnées dans une base et amalgames de notation.

Lorsqu'on se place dans $\mathbb{R}^n$, on peut écrire de façon unique le vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n)$ comme un n-uplet d'éléments de $\mathbb{R}$. Cette notion est associée à la construction purement ensembliste de $\mathbb{R}^n$ comme produit cartésien $\mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$, elle ne prérequiert aucune structure d'espace vectoriel, et encore moins le concept de base.

Cette structure de produit cartésien permet néanmoins de munir $\mathbb{R}^n$ d'une somme vectorielle et d'une multiplication extérieure en héritage des multiplication et additions de $\mathbb{R}$ vu comme un corps. On peut alors définir la notion de *base canonique* $\mathcal{B}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}_n$, où e_i est le n-uplet $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, le 1 est positionné à la case i. Dès lors, on peut exprimer le vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, vu comme n-uplet dans la base $\mathcal{B}$:

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

Les deux écritures sont les mêmes, ce qui engendre souvent un amalgame de notations, on voit parfois "$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$". On comprend très bien le sens à donner à cette expression, mais il s'agit d'une tautologie, qui définit la base canonique en faisant appel à une expression dans la base canonique [1] !

On retiendra que le concept de base est généralisable à des espaces vectoriels qui ne sont pas bâtis sur le produit cartésien d'ensembles, mais qu'on ne peut pas définir pour eux de "base canonique". Cependant, ont peut toujours raisonner sur les matrices colonnes, et penser ces espaces comme $\mathbb{R}^n$: c'est le but de cet exercice.

1. Donnez une base $\mathcal{E}$ de l'espace des solutions de l'équation $y'' + y = 0$.
2. Donnez l'expression de la solution générale de cette équation comme vecteur colonne dans $\mathcal{E}$.
3. On veut résoudre cette équation avec la condition que $y(0) = 1/2$ $y'(0) = 1$, donnez l'unique solution associée.
4. Comment penser à ce problème dans $\mathbb{R}^2$?

1. Nous ne nous priverons pas de cette notation confortable, il faut simplement en comprendre le sens.