L3 E3A Algèbre

TD2 : Applications linéaires

Exercice 1 : Application linéaire

1. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application. Rappelez la définition d'une application linéaire, de son noyau et de son image.
2. (a) Montrez que le noyau est un sous-espace vectoriel de E, l'image un sous-espace vectoriel de F.
   (b) Donnez un exemple d'application linéaire, donnez son noyau et son image. On préfèrera un exemple graphique.
   (c) Donnez un exemple d'application non linéaire telle que $f^{-1}(\{0_F\})$ n'est pas un espace vectoriel.
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+z \end{pmatrix}$$
   (a) Montrez que f est linéaire.
   (b) Décrire son noyau et son image. f est-elle un isomorphisme ?

Exercice 2 : Somme directe

1. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrez que la somme $F+G$ est directe dans E si et seulement si l'application
$$\begin{array}{rcl} f : F \times G & \to & E \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Qu'en concluez-vous sur la décomposition d'un élément de E en éléments de F et G ?
2. On peut généraliser la notion de somme directe à une famille de sous-espaces vectoriels de E $(F_1 \dots F_n)$. Montrez que les propositions suivantes sont équivalentes : la somme $+_{i=1}^{n} F_i$ est directe dans E
   - Si et seulement si l'application
$$\begin{array}{rcl} f : F_1 \times F_2 \dots F_n & \to & E \\ (x_1, x_2, \dots x_n) & \mapsto & x_1 + x_2 + \dots x_n \end{array}$$
     est un isomorphisme.
   - Si et seulement si
$$\forall i \in 2 \dots n, (F_1 + F_2 + \dots + F_{i-1}) \cup F_i = \{0_E\}$$
     et tout élément de E admet au moins une écrite comme somme d'éléments des F_i.
   - Si et seulement si l'écriture de $u \in E$ comme somme d'éléments des F_i est unique.
3. Montrez qu'en dimension finie,
$$\forall i \in 2 \dots n, (F_1 + F_2 + \dots + F_{i-1}) \cup F_i = \{0_E\}$$
et $\sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) = \dim(E)$ est une condition nécessaire et suffisante.

4. Montrez que l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions réelles paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions réelles impaires sont en somme directe dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Théorème du rang

1. Rappelez le théorème du rang.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de même dimension finie d.
   Soit $f : E \to F$ une application linéaire telle que $\mathrm{rg}(f) < d$. La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 4 : Théorème du rang 2

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Dans cet exercice, on se propose de prouver le théorème du rang en montrant que deux sous-espaces de E sont en somme directe, l'un étant le noyau de f, l'autre isomorphe à l'image de f.

1. Pour fixer les idées, proposez une application $f_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ de rang 1. Représentez son noyau et son image.
2. Notons $K_1 = \ker(f)$, on est en dimension finie, et il existe donc un supplémentaire de K dans E. On le note K_2.
   (a) Toujours pour fixer les idées, proposez une telle décomposition si $f = f_1$, représentez K_2 sur le dessin précédent.
   (b) En général, que peut-ont dire sur les dimensions de K_1, K_2 et E ?
3. Prouvez que K_2 est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.
4. En déduire que le théorème du rang est vrai.

Exercice 5 : Isomorphismes en dimension finie

Montrez qu'en dimension finie, un endomorphisme est en fait un isomorphisme dès lors que, au choix :

- Son noyau est réduit à l'élément nul.
- Son image est l'espace E tout entier.
- Il est injectif.
- Il est surjectif.

Exercice 6 : Matrice d'une application linéaire.

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2y, 3x-2y) \end{array}$$

1. Décrire le noyau et l'image de f. Quelles sont leurs dimensions ? f est-elle injective ? bijective ? surjective ?
2. Même question avec

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-3y, 2y+z) \end{array}$$

3. Même question pour $f \circ g$ et $f \circ g$.
4. Ecrire les matrices de f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

5. On considère les nouvelles bases $\mathcal{E} = \{(1,2),(-1,1)\}$ et $\mathcal{F} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(0,1,2)\}$. Ecrire les matrices de passages des anciennes aux nouvelles bases, et des nouvelles bases aux anciennes bases.
6. Rééecrire les matrices relativement aux nouvelles bases.