TD3 : Matrices

Exercice 1 : Multiplication de matrices

Considérons les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez si cela fait sens AB,BA,CD,DC,AE,CE.

Exercice 2 : Composition d'applications linéaires vue comme produit de matrices.

1. Donnez la matrice d'une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Calculez le produit d'une matrice de rotation d'angle θ, et d'une rotation d'angle ϕ.
3. Aurait-on pu voir ce résultat plus rapidement ?

Exercice 3 : Inversion de Matrices

1. Déterminez l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix. On suppose $ad-dc \neq 0$.

2. Déterminez l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. Soit une matrice P telle que $P^2+P-I=0$. Montrez que P est inversible et trouvez son inverse.

Exercice 4 : Changement de bases, multiplication de matrice.

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Introduisons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (2, 0, 1)$.
1. Prouver que $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dresser $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
3. Déterminer N^n pour $n \geqslant 1$.
4. En déduire l'expression de M^n pour $n \geqslant 1$.

Exercice 5 : L'égalité $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$

On désigne par E_{ij} la matrice $n \times n$ dont tous les termes sont nuls sauf le (ij)-ème qui vaut 1 et pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice $B_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$. Nous introduisons $B_{31}(\lambda)$ pour $n = 4$:

$$B_{31}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin on note $E_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices $B_{ij}(\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous allons établir l'égalité $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$.

1. Que vaut le produit $B_{ij}(\lambda)B_{ij}(\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$? Quel est l'inverse de $B_{ij}(\lambda)$?

2. Quel est l'effet sur une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ d'une multiplication par $B_{ij}(\lambda)$ à droite ? Et à gauche ?

3. Momentanément, on suppose que $n = 2$.

a. Commencer par dresser un dictionnaire liant les quatres transformations :

$$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \qquad C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 \qquad C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$$

et les quatres multiplications par $B_{12}(\lambda)$ à gauche et à droite et par $B_{21}(\lambda)$ à gauche et à droite.

b. Montrer que pour toute matrice M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a ou b non nul, il existe $Q \in E_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

(on pourra distinguer les cas $a = 0$, $b = 0$ et a, b non nuls).

c. En déduire que pour toute matrice M de taille 2×2 avec une première ligne non nulle, il existe $P, Q \in E_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Au fait que vaut Δ ?

d. Montrer que pour toute matrice $M \in SL_2(\mathbb{R})$ il existe $P, Q \in E_2(\mathbb{R})$ telles que $PMQ = \mathrm{I}_2$. Pourquoi cela prouve-t-il que $M \in E_2(\mathbb{R})$.

e. À titre d'exemple, pour $a \in \mathbb{R}^*$ écrire la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ comme produit de $B_{ij}(\lambda)$.

4. Passons maintenant au cas de n quelconque en considérant $M \in SL_n(\mathbb{R})$.

a. Commencer par montrer qu'il existe $P, Q \in E_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

avec $N \in SL_{n-1}(\mathbb{R})$.

b. En déduire que $SL_n(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $P \in E_n(\mathbb{R})$ et une autre $Q \in E_n(\mathbb{R})$ telles que $M = P \times \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \Delta) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \Delta) \times Q$.