L3 E3A Algèbre

TD4 : Déterminant

Exercice 1 : Multilinéarité

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application ϕ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + y_2 + z_3$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$$

Exercice 2 : Formes bilinéaires

Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur $\mathbb{R}^2$ forme un espace vectoriel, en donner une base.

Exercice 3 : Changements de signe

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ et $A' = ((-1)^{i+j}a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Exercice 4 : Trace d'un endomorphisme

Soit E un ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(\vec{u}_1), \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) + \det(\vec{u}_1, f(\vec{u}_2), \vec{u}_3, \ldots, \vec{u}_n) + \cdots + \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, f(\vec{u}_n)) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)\operatorname{Tr}(f).$$

Exercice 5 : Divisibilité

Sans calcul, montrer que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 14 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

est divisible par 14.

Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 6 : Déterminant de Vandermonde

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$