



MASTER ICFP
École Normale Supérieure, UPMC,
Paris-Sud XI, Paris Diderot

Stage 2015–2016
Gabriel Rocheman
M2 Physique Théorique

Théorie des Jeux en Champ Moyen : Comment quantifier le racisme ?

Résumé : Nous introduisons la théorie des jeux en champ moyen et ses analogies avec la physique, puis nous nous focalisons sur les interactions entre deux populations de joueurs. Plus spécifiquement, nous observons deux populations qui présentent une aversion mutuelle, et nous appliquons une méthode d'*instabilité linéaire* pour en inférer la taille caractéristique des *ghettos* qui devraient se former.

Mots clefs : *Jeux en Champ Moyen, Econophysique, Equation de Schrödinger Non-Linéaire, Modèle de Schelling*

Stage encadré par :
Denis Ullmo
denis.ullmo@u-psud.fr / tél. (+33) 1 69 15 74 76
LPTMS
LPTMS - Université Paris Sud - Bâtiment 100
15 rue Georges Clémenceau
91405 Orsay CEDEX, FRANCE
<http://http://lptms.u-psud.fr/>



Remerciements

Je remercie chaleureusement Denis Ullmo qui m'a permis d'en apprendre plus sur un sujet qui m'intéresse beaucoup, et dont les conseils avisés et les explications me furent d'une grande aide tout au long de ce stage.

Je remercie Igor Swiecicki et Thierry Gobron d'avoir, lors de nombreuses discussions, aiguillé mes efforts et éclairé ma lanterne sur les méthodes à appliquer dans ces problèmes de théorie des jeux à champ moyen.

Merci également à Nicolas Pavloff qui, bien qu'il travaillât sur d'autres questions que les miennes, prit le temps de m'aider à mieux comprendre l'équation de Schrödinger non linéaire.

Et enfin, je remercie tous les stagiaires, doctorants et post-doctorants pour leur accueil exceptionnel, et pour avoir participé à l'ambiance chaleureuse qui régnait au sein du laboratoire pendant ce stage.

Table des matières

| | | |
|-------|--|----|
| 1 | Introduction | 4 |
| 2 | Contexte théorique du travail de recherche, | 4 |
| 2.1 | La théorie des jeux en champ moyen | 4 |
| 2.1.1 | position du problème en terme de contrôle optimal | 4 |
| 2.1.2 | Equations d'un modèle général de Mean-Field Game | 5 |
| 2.1.3 | états ergodiques | 7 |
| 2.2 | Analogie avec la physique | 7 |
| 2.2.1 | Analogie avec l'équation de Schrödinger Non Linéaire | 7 |
| 2.2.2 | Cas d'une population fortement coopérative : le soliton | 8 |
| 3 | Travail de recherche : interactions entre deux populations | 9 |
| 3.1 | Un cas simple : interactions à longue portée entre solitons | 10 |
| 3.2 | Interaction à courte portée | 11 |
| 3.2.1 | introduction et motivation : le modèle de Schelling | 11 |
| 3.3 | vers une version Mean-Field-Games de ce modèle | 11 |
| 3.3.1 | simplification du modèle, établissement des équations | 11 |
| 3.3.2 | Résultats connus et motivation du travail de recherches | 12 |
| 3.3.3 | Développement | 13 |
| 3.3.4 | Particularité du problème : stabilité et découplage des perturbations initiales et finales | 14 |
| 3.3.5 | vérification du raisonnement qualitatif par le calcul | 16 |
| 4 | Conclusion et perspectives | 19 |

1 Introduction

Depuis les années 1990, un engouement grandit chez les physiciens pour ce que H. E. Stanley a nommé l'*éconophysique* [1].

Les théories économiques d'alors reposaient en général sur des postulats d'équilibre déterministe (loi de l'offre et de la demande, équilibre macroéconomique...). Mais après une reformulation de l'économie en termes de variables aléatoires [2], cette idée est remise en question au profit d'un équilibre statistique, voire de situations hors équilibre. C'est pourquoi les succès de la physique statistique ont inspiré à certains chercheurs l'idée d'appliquer les mêmes méthodes à l'économie. Toutefois, depuis l'invention de cette branche de recherche interdisciplinaire, les angles d'approche ont surtout été descriptifs et phénoménologiques (*statistical econophysics*), ou computationnels (*agent-based econophysics*).

Parallèlement, depuis le développement de la théorie des jeux par J. Von Neumann et O. Morgenstern en 1944 [3] (à partir des travaux antérieurs de E. Borel et de A. A. Cournot), économistes et mathématiciens cherchent à définir des modèles théoriques *axiomatiques* de l'économie, mais se heurtent à l'intractabilité des méthodes de théorie des jeux lorsque le nombre de joueur et de stratégies est trop important. Récemment, une nouvelle méthode a été mise au point par des mathématiciens [4] pour contourner ce problème, et ce non seulement en économie mais pour les sciences sociales en général. Cette méthode consiste à appliquer les hypothèses de la *théorie des jeux* à un grand groupe de joueurs, avec une approximation de type *champ moyen*, empruntée elle aussi à la physique statistique.

Cependant l'approximation du champ moyen implique de considérer une population de joueurs *homogène*, ce qui peut s'avérer insuffisant dans le cas général. C'est pourquoi mon but lors de ce stage, outre celui de me familiariser avec la théorie des jeux en champ moyen et d'explorer ses liens avec la physique, a été d'étudier le cas d'interactions entre plusieurs populations.

2 Contexte théorique du travail de recherche,

Cette partie est une introduction à la théorie des Jeux en Champ Moyen (en anglais : *mean-field games*, MFG), introduite simultanément par J.M. Lasry et P.L. Lions [5, 6], et par P.E. Caines, M.Y. Huang et R.P. Malhamé [7]. Une introduction plus complète peut-être trouvée dans [4].

2.1 La théorie des jeux en champ moyen

2.1.1 position du problème en terme de contrôle optimal

Modéliser des agents en un MFG, revient à un problème dit *de contrôle optimal*.

1. On se donne une famille d'agents I , suffisamment grande pour être identifiée à un *continuum*.
2. Chaque agent $i \in I$ possède un *état* $X_i(t)$, susceptible d'être modifié. Cet état est un vecteur de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, où chaque coordonnée correspond à l'un des degrés de liberté considérés (position géographique, revenus, capital, orientation politique, niveau d'études...).
3. Les agents sont répartis suivant une densité $m(x, t)$, où x parcourt Ω , et t parcourt un intervalle $[0, T]$. On a la condition initiale sur la densité, $m(x, t = 0) \triangleq m_0(x)$

4. $X_i(t)$, est assimilé à un processus stochastique, soumis à une dynamique de Langevin dans laquelle interviennent
- un *drift* : une certaine fonction $\alpha(X(t), t)$. Le joueur choisit cette fonction de manière à minimiser son coût (c'est le *paramètre de contrôle*). C'est un vecteur de vitesse, qui prend ses valeurs dans $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.
 - un *bruit blanc gaussien* de paramètre σ , constant et fixé *a priori* dans le modèle.
- Somme toute, l'équation de Langevin prend la forme

$$dX_i(t) = \alpha(X_i(t), t)dt + \sigma dW_i(t) \quad (\text{L})$$

où $W_i(t)$ est un mouvement brownien.

5. Sur l'intervalle de temps $[0, T]$, l'agent cherche à suivre une trajectoire $X(t)$ qui minimise une certaine fonctionnelle de coût :

$$J[X(\cdot), \alpha(\cdot)] = \mathbb{E} \left[\int_0^T c(X(s), \alpha(X(s), s)) + V[m(\cdot, s); X(s)] ds \right] + c_T(X(T)) \quad (1)$$

avec

- L'espérance mathématique sur le bruit blanc \mathbb{E}
- un *coût final* $c_T(x)$
- un *coût mobile* $c(x, \alpha)$ strictement convexe sur α (plus le drift est grand, plus l'augmenter coûte cher).
- un *coût d'interaction* $V[m(\cdot, t); x]$.

La notation $V[m(\cdot, t); x]$ signifie que l'objet mathématique V associée à la fonction $m(\cdot, t)$ est une autre fonction $V[m(\cdot, t)]$ qui est *elle-même* évaluée en x . Concrètement, cela signifie que l'agent situé en x n'interagit avec les autres joueurs *que via leur densité* : pour chaque joueur i , les autres joueurs sont indiscernables (c'est l'approximation de champ moyen).

2.1.2 Equations d'un modèle général de Mean-Field Game

L'équation de Langevin (L) donne assez aisément la dynamique de la densité de joueurs m , régie par l'équation de Fokker-Planck (également nommée équation de Kolmogorov) :

$$\partial_t m + \nabla(\alpha^*(x, t) \cdot m) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta m \quad (\text{F.P.})$$

avec α^* le drift optimal.

La démonstration de cette équation est suffisamment connue pour que nous ne la réitérions pas ici. Toutefois, le principe de minimisation dans une dynamique bruitée n'est pas un problème commun en physique. On va donc dériver de manière heuristique l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui permet de trouver le drift optimal.

Théorème 1. Le drift optimal α^* est le maximiseur de $-\alpha \cdot \nabla u(x, t) - c(x, \alpha)$

où u est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$-\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \max_{\alpha(x, t) \in \Lambda} \{-\alpha(x, t) \cdot \nabla u(x, t) - c(x, \alpha(x, t))\} = V[m(\cdot, t); x] \quad (\text{H.J.B.})$$

Démonstration. Cette démonstration utilise le *principe d'optimalité de Bellman*, qui s'exprime intuitivement comme suit :

Quel que soit l'état initial A_0 , une stratégie optimale a la propriété suivante :
Après une première décision $\{A_0 \rightarrow A_1\}$, l'ensemble des décisions suivantes doit constituer une stratégie optimale pour l'état initial A_1 .

(★)

La démonstration consiste alors à appliquer cette condition nécessaire à *un pas infinitésimal* dans la trajectoire optimale $X(t)$.

On définit la *fonction valeur* :

$$u(X(t), t) = \min_{\alpha(\cdot)} \left\{ \int_t^T c(X(s), \alpha(X(s), s)) + V[m(\cdot, s); X(s)] ds + c_T(X(T)) \right\} \quad (2)$$

Cette fonction donne le *coût restant optimal*, en supposant qu'on est déjà arrivé à $X(t)$ à l'instant $t < T$. On a d'ores et déjà la *condition finale* imposée sur la fonction u : cette dernière doit trivialement vérifier

$$u(x, T) = c_T(x) \quad (3)$$

Le principe d'optimalité (★) implique qu'après avoir payé le coût d'un pas infinitésimal ($dX(t), dt$), le coût restant sera encore optimal. Cela s'écrit comme (4) :

$$u(X(t), t) = \min_{\alpha(\cdot)} \left\{ \int_t^{t+dt} c(X(s), \alpha(X(s), s)) + V[m(\cdot, s); X(s)] ds + u(X(t) + dX(t), t + dt) \right\} \quad (4)$$

On développe $u(X(t) + dX(t), t + dt)$ au premier ordre en dt (rappelons qu'heuristiquement, dans (L), $dW_i(t) \sim dt^{1/2}$).

$$\min_{\alpha(\cdot)} \left\{ c(X(t), \alpha(t)) + V[m(\cdot, t); X(t)] + \partial_t u + dX_i(t) \cdot \nabla u + \frac{1}{2} Tr \left[d\bar{X}_i^2(t) \cdot \bar{\nabla}^2 u \right] \right\} = 0 \quad (5)$$

Il suffit alors de prendre l'espérance mathématique :

$$\mathbb{E}(dW_i) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(d\bar{W}_i^2) = dt\bar{1},$$

$$\text{donc } \mathbb{E}(d\bar{X}_i^2) = \sigma^2 dt\bar{1} + O(dt^2).$$

On en déduit directement l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.) :

$$-\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \max_{\alpha(x,t) \in \Lambda} \{-\alpha(x,t) \cdot \nabla u(x,t) - c(x, \alpha(x,t))\} = V[m(\cdot, t); x] \quad (\text{H.J.B.})$$

Il s'ensuit que le drift α qui minimise l'expression (2) et donc qui maximise (H.J.B.) est bien le drift optimal. \square

En fin de compte, un modèle de MFG s'écrit comme le système d'équations suivant :

$$-\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \max_{\alpha \in \Lambda} \{-\alpha \cdot \nabla u(x, t) - c(x, \alpha)\} = V[m(\cdot, t); x] \quad (\text{H.J.B.})$$

$$\partial_t m + \nabla(\alpha^*(x, t) \cdot m) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta m \quad (\text{F.P.})$$

Les équations sont couplées au travers de α^* dans (F.P.), qui est le maximiseur de (H.J.B.).

2.1.3 états ergodiques

Un autre résultat a été démontré par Cardaliaguet et al. [8] : la convergence des solutions vers un *état ergodique* (sous certaines conditions admises ici).

En supposant $T \rightarrow \infty$, on peut démontrer que, dans la limite $0 \ll t \ll T$, il existe une certaine constante \bar{v} appelée *constante ergodique*, telle que

$$\frac{u(x, t)}{t} \underset{0 \ll t \ll T}{\sim} \bar{v} \quad (6)$$

(en général, \bar{v} n'est pas connue à priori)

Dans la même limite, la densité devient stationnaire :

$$m(x, t) \underset{0 \ll t \ll T}{\sim} m^*(x) \quad (7)$$

Ce qui revient intuitivement à résoudre un système d'équation différent pour trouver ces solutions ergodiques (u^*, m^*) :

$$-\bar{v}u^* - \frac{\sigma^2}{2}\Delta u^* + \max_{\alpha \in \Lambda} \{-\alpha \cdot \nabla u^*(x, t) - c(x, \alpha)\} = V[m(\cdot, t); x] \quad (\text{H.J.B.e})$$

$$\nabla(\alpha^*(x, t) \cdot m^*) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta m^* \quad (\text{F.P.e})$$

Les états ergodiques sont importants car, lorsque T est grand, le système tente de se rapprocher au maximum d'une de ces solutions stationnaires, et y demeure donc longtemps avant de rejoindre sa condition finale. En somme, pour les jeux suffisamment longs, cette solution donne la forme globale que prendra la densité la majeure partie du temps.

2.2 Analogie avec la physique

Dans cette partie, nous allons voir comment on peut retrouver des analogies avec des problèmes issus de la physique. Ce sont des analogies au niveau des équations de la dynamique, toutefois, en tant que physicien, il faut garder à l'esprit une différence majeure avec les problèmes usuels de physique : dans un MFG, les conditions initiales de premier et deuxième ordre sont remplacées par des *conditions mixtes* : une condition *finale* sur u et une condition *initiale* sur m .

Cette partie est tirée de travaux réalisés par I. Swiecicki, T.Gobron et D. Ullmo : [9].

2.2.1 Analogie avec l'équation de Schrödinger Non Linéaire

Dans la suite, nous imposerons la forme du coût mobile c :

$$c(x, \alpha) = \frac{\mu}{2}|\alpha|^2 \quad (8)$$

Ce choix nous rapproche encore un peu du domaine habituel de la physique, où l'énergie cinétique prend une forme analogue dans l'action.

Dans ce cas, le problème de maximisation se simplifie grandement : on trouve aisément que les équations deviennent

$$-\partial_t u - \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \frac{1}{2\mu} |\nabla u|^2 = V[m(\cdot, t); x] \quad (\text{H.J.B.}\phi)$$

$$\partial_t m - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot ((\nabla u)m) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta m \quad (\text{F.P.}\phi)$$

A partir de là, une transformation assez intuitive s'impose : la transformation dite de Cole-Hopf :

$$\Phi(x, t) \triangleq e^{-\frac{u(x,t)}{\mu\sigma^2}} \text{ et } \Gamma(x, t) \triangleq \frac{m(x, t)}{\Phi(x, t)} \quad (9)$$

Cette transformation est intuitive car on sait que, si l'on part d'une équation de Schrödinger non linéaire sur une fonction d'onde ψ , alors prendre l'ansatz $\psi \triangleq e^{\frac{i}{\hbar}S}$, puis l'approximation classique $\hbar \rightarrow 0$ permet de retrouver une équation de Hamilton-Jacobi sur S (c'est l'approximation W.K.B. à l'ordre 0). Dans (H.J.B.ϕ), on a un terme de bruit supplémentaire $\frac{\sigma^2}{2} \Delta u$; il correspond au terme $\frac{i\hbar}{2m} \Delta S$ qui disparaît dans l'approximation classique.

Après calcul, on retrouve bien une équation de Schrödinger Non Linéaire (N.L.S.), et sa conjuguée (N.L.S.*), toutes deux prises en temps imaginaire :

$$-\hbar \partial_t \Phi = \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Phi + V[\Phi \Gamma; x] \Phi \quad (\text{N.L.S.})$$

$$\hbar \partial_t \Gamma = \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Gamma + V[\Phi \Gamma; x] \Gamma \quad (\text{N.L.S.*})$$

où l'on a défini $\hbar \triangleq \mu\sigma^2$ pour appuyer encore sur l'analogie ;

La densité d'agents pour une solution est donnée par $m(x, t) = \Phi(x, t)\Gamma(x, t)$

2.2.2 Cas d'une population fortement coopérative : le soliton

A partir de cette analogie, on peut retrouver des résultats standards de l'optique non linéaire, et les appliquer à un contexte sociologique. Pour cela nous prenons une forme particulière de potentiel qui représente une forte tendance à la coopération dans notre population :

$$V[m; x] = gm(x, t)^a + U(x) \quad (10)$$

En supposant l'influence de U négligeable devant celle de $gm(x, t)^a$ au départ, et avec $0 < a < 2$.

Dans ce cas, {(N.L.S.), (N.L.S.*)} devient un exact analogue de l'équation de Schrödinger non linéaire habituelle (Gross-Pitaevskii). Par un raisonnement analogue au cas physique, on peut trouver des solutions ergodiques qui ont la forme de *solitons*. Nous retraçons rapidement ce raisonnement en dimension 1. Ce travail est tiré de [9].

Les solutions *ergodiques* sont des solutions de l'équation (N.L.S.) non dépendante du temps : (N.L.S.e)

$$\epsilon \psi = \frac{\hbar^2}{2\mu} \psi'' + g\psi^{2a+1} \quad (\text{N.L.S.e})$$

où l'on a défini ϵ la constante ergodique. Cela revient à imposer $\Psi(x, t) \triangleq e^{-\frac{\epsilon}{\hbar}t} \psi_\Phi(x)$ et $\Gamma(x, t) \triangleq e^{\frac{\epsilon}{\hbar}t} \psi_\Gamma(x)$.

On peut définir une fonctionnelle d'énergie $E[\Gamma, \Phi]$ de manière à ce que le système $\{(\text{N.L.S.}), (\text{N.L.S.*})\}$ dérive de cette énergie (autrement dit, $(\text{N.L.S.}) \Leftrightarrow -\hbar\partial_t\Phi = \frac{\delta E}{\delta\Gamma}$ et $(\text{N.L.S.*}) \Leftrightarrow \hbar\partial_t\Gamma = \frac{\delta E}{\delta\Phi}$) :

$$E[\Phi, \Gamma] \triangleq \int dx - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d\Phi}{dx} \frac{d\Gamma}{dx} + \frac{g}{a+1} (\Phi\Gamma)^{a+1} \quad (11)$$

Par symétrie des rôles de Φ et Γ dans E , on peut s'attendre à avoir pour la solution stationnaire de plus basse énergie,

$$\psi_\Phi = \psi_\Gamma \triangleq \psi \quad (12)$$

On peut résoudre (N.L.S.e) en la multipliant par ψ' , puis en intégrant selon x pour avoir une équation du premier ordre à variable séparables sur ψ . La constante d'intégration est nulle par $\psi^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ à l'infini.

$$\epsilon\psi^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + \frac{g}{a+1} \psi^{2(a+1)} \quad (13)$$

On trouve une équation du premier ordre, non linéaire mais à variable séparable. Après avoir intégré cette équation, on trouve que la densité d'agents ergodique est de la forme :

$$m^*(x) = \psi^2(x) = A \cosh\left(\frac{x}{\eta}\right)^{-\frac{2}{a}} \quad (14)$$

ce qui correspond bien à un soliton. Les constantes A et η peuvent être déterminées, mais prennent une forme compliquée dans le cas d'un exposant a général. Nous nous contenterons donc de remarquer que ce problème nous donne accès à une échelle de longueur η (e.g. pour $a = 1$, on trouve $\eta = 2\frac{\hbar^2}{\mu g}$).

La suite de la réflexion consiste à déterminer le temps de formation et de destruction d'un soliton. Pour cela, on prend un *ansatz* gaussien pour Γ et Φ , que l'on remplace dans l'action suivante :

$$S[\Gamma, \Phi] = \int dt dx \frac{\hbar}{2} \Gamma \overset{\leftrightarrow}{\partial}_t \Phi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d\Phi}{dx} \frac{d\Gamma}{dx} + \frac{g}{a+1} (\Phi\Gamma)^{a+1} \quad (15)$$

La minimisation de cette action permet alors de trouver comment la variance $\Sigma^2(t)$ de notre *ansatz* s'approche de η^2 (à partir de $t=0$), puis s'en écarte (vers $t=T$).

La conclusion de ce calcul pour $a = 1$ est que le temps caractéristique de cette convergence est très court : $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mu\eta^3}{g}}$.

3 Travail de recherche : interactions entre deux populations

A partir des données de la section précédente, notre travail de recherche a consisté à étudier des cas d'interaction entre deux populations. Premièrement, tous les résultats de la section précédente se généralisent sans problème au cas de 2 populations ($i \in \{-1, 1\}$) :

$$-\partial_t u_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \Delta u_i + \frac{1}{\mu_i} \nabla u_i = V_i[m_1, m_2; x] \quad (\text{H.J.B. 2})$$

$$\partial_t m_i - \frac{1}{\mu_i} \nabla \cdot ((\nabla u) m_i) = \frac{\sigma_i^2}{2} \Delta m_i \quad (\text{F.P. 2})$$

et

$$-\hbar_i \partial_t \Phi_i = \frac{\hbar_i^2}{2\mu_i} \Delta \Phi_i + V_i[m_1, m_2; x] \Phi_i \quad (\text{N.L.S. } 2)$$

$$\hbar_i \partial_t \Gamma_i = \frac{\hbar_i^2}{2\mu_i} \Delta \Gamma_i + V_i[m_1, m_2; x] \Gamma_i \quad (\text{N.L.S.* } 2)$$

3.1 Un cas simple : interactions à longue portée entre solitons

On peut commencer par retrouver les relations de Ehrenfest dans le cas général : On définit les opérateurs linéaires suivants

$$\hat{H}_i \triangleq \frac{\hat{\Pi}_i^2}{2\mu_i} + V_i[m_1, m_2; \hat{X}] \quad (16)$$

$$\hat{\Pi}_i \triangleq \hbar_i \nabla \quad (17)$$

$$\hat{X} \triangleq x \quad (18)$$

Pour un opérateur $\hat{O}(\hat{X}, \hat{\Pi})$,

$$\langle \hat{O} \rangle_i \triangleq \int dx \Gamma_i(t, x) \hat{O} \Phi_i(t, x) \quad (19)$$

On obtient assez facilement

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle_i = \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle_i \quad (20)$$

et ainsi, toutes les relations analogues à la mécanique Newtonienne :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle_i = \frac{\langle \hat{\Pi} \rangle_i}{\mu_i} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\Pi} \rangle_i = \langle -\nabla V_i \rangle_i \quad (22)$$

Prenons un potentiel général, de la forme $V_i[m_1, m_2; x] \triangleq \int dx' m_{3-i}(x') U_i(|x - x'|)$.

$$\mu_i \frac{d^2}{dt^2} \langle X \rangle_i = - \int dx m_i(x) \int dx' m_{3-i}(x') \nabla U_i(|x - x'|) \quad (23)$$

Si l'on développe $U_i(x - x')$ en $r \triangleq \langle X \rangle_1 - \langle X \rangle_2$, en supposant r grand devant les variances de m_i (notées Σ_i), on obtient rapidement que

$$\mu_i \frac{d^2}{dt^2} \langle X \rangle_i = -\nabla U_i(r) + O\left(\left(\frac{\Sigma_i}{r}\right)^2\right) \quad (24)$$

Les solitons se comportent bien comme des particules classiques lorsqu'ils sont éloignés l'un de l'autre.

3.2 Interaction à courte portée

3.2.1 introduction et motivation : le modèle de Schelling

En sciences sociales, il existe un modèle de ségrégation géographique qui possède quelques similarités avec des modèles physiques bien connus, appelé modèle de Schelling [10]. C'est un modèle explicatif de ségrégation qui fonctionne comme suit :

1. On se donne un réseau à base carrée, sur lequel sont répartis aléatoirement deux populations différentes. On laisse des espaces libres sur le réseau.
2. Chaque agent possède une fonction de coût, qui indique que les agents ne sont pas ouvertement racistes, mais ne sont pas à l'aise lorsqu'ils sont trop minoritaires dans leur environnement immédiat. En somme, leur fonction de coût se met à augmenter lorsque la proportion de leurs voisins qui leur ressemble tombe sous une certaine proportion $p \in]0, 1]$

En notant $n_{i,j}^a$ le nombre de voisins du site (i, j) appartenant à la population $a \in \{-1, 1\}$, on peut par exemple avoir la fonction de coût suivante :

pour un agent de la population a au site (i, j) ,

$$c_{i,j}^a = \left(p - \frac{n_{i,j}^a}{n_{i,j}^a + n_{i,j}^{-a}} \right) \cdot \theta \left(p - \frac{n_{i,j}^a}{n_{i,j}^a + n_{i,j}^{-a}} \right) \quad (25)$$

3. A chaque itération, on laisse les agents qui ne sont pas satisfaits se déplacer vers un site libre du réseau.

La conclusion de ce modèle est que même avec une proportion p assez faible (de l'ordre de 30% par exemple), le système converge rapidement vers un état de ségrégation, où les populations 1 et 2 vivent dans des blocs bien séparés. Cette conclusion a eu un certain impact sur la pensée sociologique contemporaine. En effet, face au constat d'une certaine séparation géographique entre les communautés, le consensus était de conclure que les populations étaient simplement trop racistes ou communautaristes, et recherchaient activement à réduire au maximum la mixité sociale de leur environnement. Ce que Schelling a montré, c'est que des phénomènes de ségrégation peuvent apparaître à grande échelle, bien qu'aucun des agents n'applique systématiquement sa stratégie individuelle à fuir l'autre population, ni à se rapprocher de ses pairs.

Dans la suite, on va commencer d'adapter ce modèle en une version MFG en utilisant des outils de physique.

3.3 vers une version Mean-Field-Games de ce modèle

3.3.1 simplification du modèle, établissement des équations

Le premier problème auquel on se heurte est celui du choix de la fonction de coût. On pourrait adapter simplement la fonction donnée en (25), mais un potentiel de la forme

$$V_i[m_1, m_2, ; x] = \left(p - \frac{m_i(x)}{m_i(x) + m_{3-i}(x)} \right) \cdot \theta \left(p - \frac{m_i(x)}{m_i(x) + m_{3-i}(x)} \right) \quad (26)$$

ne permet pas d'écrire simplement une action dont dériverait notre système.

Pour simplifier les calculs et pour se rapprocher d'un système physique, nous allons donc faire une simplification du modèle : nous considérerons que les agents visent à minimiser le potentiel suivant :

$$V_i[m_1, m_2, ; x] = -gm_{3-i}(x) \quad (27)$$

avec g une constante de couplage.

Au sens sociologique, ce modèle est moins intéressant : les agents sont ouvertement racistes, et il n'y a rien de révolutionnaire à attendre de la ségrégation à grande échelle dans un tel système. Toutefois, ce problème nous fournit un exemple de ce que le traitement perturbatif peut éclairer sur un modèle Mean-Field-Game.

3.3.2 Résultats connus et motivation du travail de recherches

Tout d'abord, ce problème a déjà été étudié par Cirant et al. sous un angle mathématique et numérique [11, 12]. En dimension 1, plusieurs solutions ergodiques existent, représentées sur la figure 1 et qui semblent correspondre à des modes en opposition de phase. Toutefois leur forme n'est pas tout à fait sinusoïdale : c'est le bruit – i.e. le paramètre σ – qui détermine le recouvrement des densités.

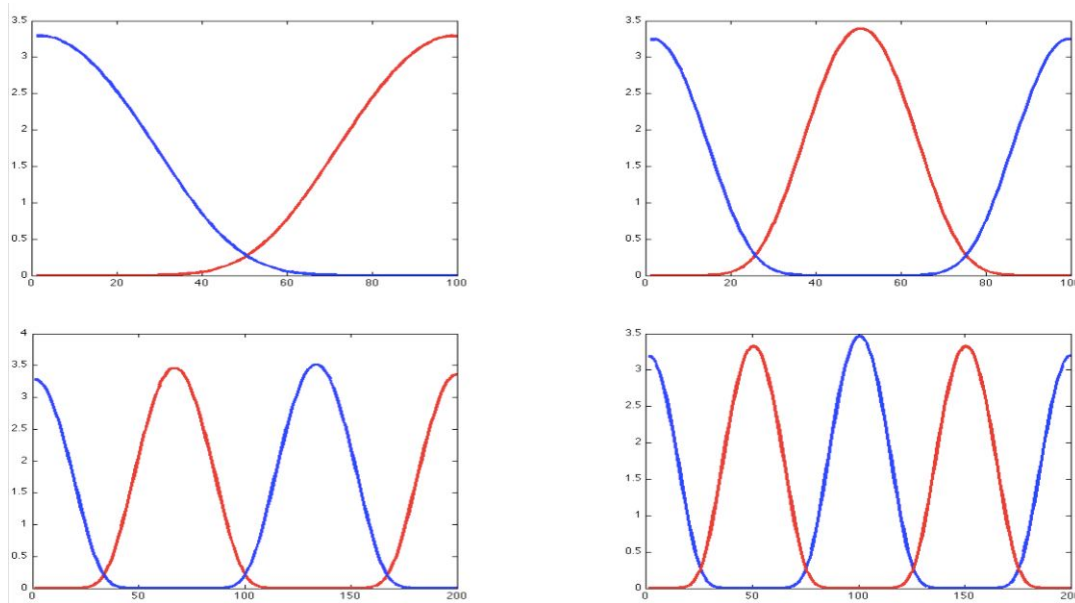


FIGURE 1 – Forme des solutions numériques avec $\sigma \ll 1$ (source de l'image : Présentation de M. Cirant [12])

Problème : On peut se poser plusieurs questions sur ces solutions. Celle que nous choisissons est la suivante : plusieurs solutions peuvent exister, certes, mais vers laquelle le système va-t-il converger ? En d'autres termes, peut-on prédire la taille caractéristique des *quartiers* qui vont apparaître en fonction des données du modèles ? Si possible, il serait intéressant d'étudier cette question en dimension d .

Méthode : Nous allons partir de la solution homogène, lui appliquer une perturbation d'un certain vecteur d'onde \vec{k} dans le régime linéaire, et voir si l'on observe une croissance singulière pour certaines valeurs de \vec{k} : on pourra alors en déduire l'existence d'une instabilité de la solution homogène à la longueur d'onde associée.

3.3.3 Développement

$$-\hbar_i \partial_t \Phi_i = \frac{\hbar_i^2}{2\mu_i} \Delta \Phi_i - g(\Phi_{3-i} \Gamma_{3-i}) \Phi_i \quad (28)$$

$$\hbar_i \partial_t \Gamma_i = \frac{\hbar_i^2}{2\mu_i} \Delta \Gamma_i - g(\Phi_{3-i} \Gamma_{3-i}) \Gamma_i \quad (29)$$

Le système $\{(28), (29)\}$ admet une solution de densités homogènes m_i^0 :

$$\Phi_i = \sqrt{m_i^0} e^{-\frac{\hbar_i}{2\mu_i} t} \quad (30)$$

$$\Gamma_i = \sqrt{m_i^0} e^{\frac{\hbar_i}{2\mu_i} t} \quad (31)$$

où l'on a pu choisir la normalisation $\sqrt{m_i^0}$ car u et c_T sont définies à une constante près.

On cherche des solutions de la forme

$$\Phi_i = \left(\sqrt{m_i^0} + \delta \Phi_i \right) e^{-\frac{\hbar_i}{2\mu_i} t} \quad (32)$$

$$\Gamma_i = \left(\sqrt{m_i^0} + \delta \Gamma_i \right) e^{\frac{\hbar_i}{2\mu_i} t} \quad (33)$$

où $\delta \Phi_i$ et $\delta \Gamma_i$ sont de petites perturbations.

Dans le régime linéaire, on peut écrire tout le système d'équation pour le vecteur de perturbations $\vec{\delta} \triangleq (\delta \Phi_1, \delta \Gamma_1, \delta \Phi_2, \delta \Gamma_2)$ dans l'espace de Fourier :

$$\partial_t \vec{\delta} = \mathbb{A} \cdot \vec{\delta} \quad (34)$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar_1 \vec{k}^2}{2\mu_1} & 0 & \frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_1} & \frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_1} \\ 0 & -\frac{\hbar_1 \vec{k}^2}{2\mu_1} & -\frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_1} & -\frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_1} \\ \frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_2} & \frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_2} & \frac{\hbar_2 \vec{k}^2}{2\mu_2} & 0 \\ -\frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_2} & -\frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar_2} & 0 & -\frac{\hbar_2 \vec{k}^2}{2\mu_2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

On obtient donc la solution générale : $\vec{\delta} = \exp t\mathbb{A} \cdot \vec{\delta}|_{t=0}$

Les conditions initiales et finales sont fixées pour

$$\delta \Phi_{1|t=T} = (\exp T\mathbb{A})_{1\vec{k}} (\vec{\delta}|_{t=0})_{\vec{k}} \quad (36)$$

$$\delta \Phi_{2|t=T} = (\exp T\mathbb{A})_{3\vec{k}} (\vec{\delta}|_{t=0})_{\vec{k}} \quad (37)$$

$$\delta m_{1|t=0} = \sqrt{m_1^0} \left((\vec{\delta}|_{t=0})_1 + (\vec{\delta}|_{t=0})_2 \right) \quad (38)$$

$$\delta m_{2|t=0} = \sqrt{m_2^0} \left((\vec{\delta}|_{t=0})_3 + (\vec{\delta}|_{t=0})_4 \right) \quad (39)$$

On peut inverser ces relations pour trouver la solution pour des conditions initiales et finales générales. Toutefois la forme analytique de ces solutions ne donne pas immédiatement une compréhension

profonde du problème, et nous allons donc procéder par un raisonnement pas à pas pour mieux saisir le comportement du modèle.

Dans la suite, pour simplifier la forme des résultats, nous nous plaçons dans le cas où les deux populations ont les mêmes constantes $\mu_i \triangleq \mu$, $\hbar_i \triangleq \hbar$. \mathbb{A} prend la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \kappa^2 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & -\kappa^2 & -\lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda & \kappa^2 & 0 \\ -\lambda & -\lambda & 0 & -\kappa^2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

avec $\lambda \triangleq \frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\hbar}$, $\kappa \triangleq \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu} |\vec{k}|}$.

Les quatre valeurs propres de \mathbb{A} , (40), prennent la forme

$$u_{\pm} \triangleq \sqrt{\kappa^4 \pm 2\lambda\kappa^2}; \text{ et leurs opposées : } -u_{\pm} \quad (\text{cf. figure 2}) \quad (41)$$

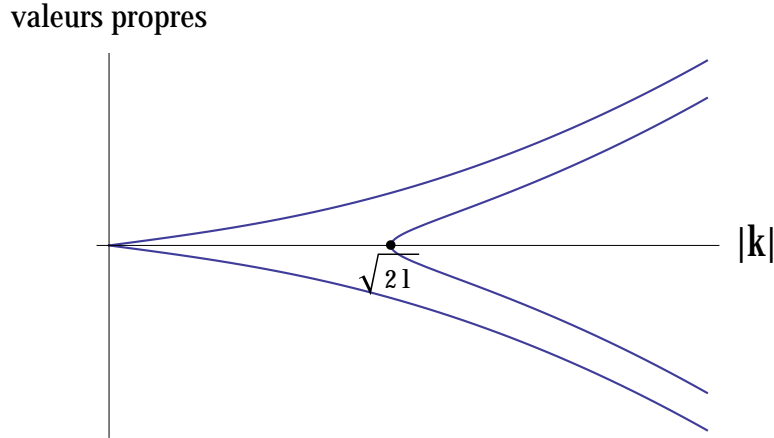


FIGURE 2 – valeurs propres de \mathbb{A} pour chaque valeur de $|\kappa|$.

Les valeurs propres tracées sur la figure 2 peuvent surprendre au premier abord : dans les modèles habituels de physique, une grande valeur propre positive indique une forte croissance du mode, mais ici il n'y a pas de valeur de κ pour laquelle les valeurs propres sont singulières, ou simplement maximales, qui pourrait indiquer un κ privilégié. Au contraire, à lire ce graphe avec l'intuition habituelle du physicien, on s'attend à voir 4 modes, dont 2 décroissent et 2 croissent exponentiellement, et – semble-t-il – d'autant plus vite que $|\kappa|$ est grand (i.e. que la longueur d'onde est petite).

Il faut aller plus loin pour saisir ce qui se passe dans ce phénomène : il semble improbable que le système privilégie des perturbations de longueur d'onde infiniment petite.

3.3.4 Particularité du problème : stabilité et découplage des perturbations initiales et finales

Commençons donc par un raisonnement qualitatif pour rétablir notre intuition du problème.

On imagine intuitivement que plus la longueur d'onde de la perturbation est petite (i.e. plus \vec{k} est grand), plus l'influence du bruit va être grande, comme dans un problème de diffusion. Donc, au delà d'un certain $|\vec{k}|$, le bruit atténuera notre perturbation, et la solution homogène sera stable. Mais la condition finale rend l'intuition moins claire : comment la stabilité de la solution homogène va-t-elle se traduire dans ce cas ?

Vu la forme de l'équation, on s'attend à voir une atténuation exponentielle lorsque la solution est stable, que ce soit pour les conditions finales ou initiales. La perturbation finale sur $\delta\Phi_{i|t=T}$, devrait donc avoir une atténuation exponentielle *vers le passé* (i.e. une exponentielle *croissante*, du passé vers le futur). On imagine donc que, si T n'est pas trop petit, $\delta\Phi_{i|t=0}$ sera proche de zéro. De même, la condition initiale sur $\delta\Gamma_{i|t=0} + \delta\Phi_{i|t=0} \simeq \delta\Gamma_{i|t=0}$ sera atténuée vers le futur.

Le problème se trouve alors grandement simplifié : on a une condition initiale sur les $\delta\Gamma_i$ atténuée vers le futur et une condition finale sur les $\delta\Phi_i$, atténuée vers le passé, donc *les $\delta\Phi_i$ sont négligeables quand les $\delta\Gamma_i$ ne le sont pas et inversement*. On devrait donc observer un *découplage* du problème sur les degrés de liberté propagés vers le futur et ceux propagés vers le passé.

Algébriquement, ce découplage se traduit par la séparation de notre espace vectoriel en deux sous espaces $E_\Phi \triangleq \text{Vect} \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ et $E_\Gamma \triangleq \text{Vect} \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$: on néglige les éléments de matrices de \mathbb{A} qui couplent les $\delta\Phi_i$ aux $\delta\Gamma_j$.

Après avoir fait les simplifications correspondantes dans le système linéaire, on obtient deux *sous-systèmes* de deux équations, dont chacun présente un couplage linéaire : un pour les $\delta\Phi_i$ et un pour les $\delta\Gamma_i$, avec les matrices respectives \mathbb{A}_Φ et $\mathbb{A}_\Gamma = -\mathbb{A}_\Phi$:

$$\mathbb{A}_\Phi = \begin{pmatrix} \kappa^2 & \lambda \\ \lambda & \kappa^2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Si on les écrit explicitement, les équations vectorielles prennent la forme

$$\partial_t \delta\vec{\Phi} = A_\Phi \delta\vec{\Phi} \quad (43)$$

$$\partial_t \delta\vec{\Gamma} = -A_\Phi \delta\vec{\Gamma} \quad (44)$$

Diagonaliser A_Φ revient à projeter sur $(1, 1)$ et $(1, -1)$, i.e. prendre la somme et la différence de chaque perturbation. Autrement dit, cela revient à séparer la partie des perturbations qui est *en phase* ($\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2$) de la partie qui est *en opposition de phase* ($\delta\Phi_1 = -\delta\Phi_2$).

Les valeurs propres de A_Φ s'écrivent

$$v_\pm \triangleq \kappa^2 \pm \lambda \quad (45)$$

1. v_+ ne concerne que les perturbations *en phase*.

v_+ est toujours positive. En conséquence, si l'on se restreint au cas des perturbations en phase, (43) et (44) nous donnent que les $\delta\Phi$ sont atténués vers le passé (exponentielle croissante), alors que les $\delta\Gamma$ sont atténués vers le futur (exponentielle décroissante). Notre raisonnement est donc auto-cohérent.

2. v_- ne concerne que les perturbations *en opposition de phase*.

— si $\kappa^2 > \lambda$, v_- est positive, les perturbations en opposition de phase sont stabilisées de même que précédemment, et notre raisonnement est auto-cohérent.

— si $\kappa^2 < \lambda$, v_- est négative, les perturbations croissent exponentiellement, et notre raisonnement n'est plus auto-cohérent.

Ce raisonnement qualitatif ne permet pas encore de bien caractériser le comportement du système. Toutefois, on peut quand même en tirer une certaine intuition sur ce qui va se produire. En effet, on s'attend à pouvoir distinguer deux régimes : au dessus d'une certaine valeur de κ , les perturbations initiales et finales se découplent et s'atténuent, alors qu'en dessous, les perturbations peuvent croître.

3.3.5 vérification du raisonnement qualitatif par le calcul

Nous allons maintenant calculer précisément les différents régimes d'évolution d'une perturbation d'un certain nombre d'onde, qu'on identifie au paramètre κ .

On rappelle la forme des valeurs propres de \mathbb{A} :

$$u_{\pm} = (\kappa^4 \pm 2\lambda\kappa^2)^{\frac{1}{2}}; \text{ et leurs opposées } -u_{\pm} \quad (46)$$

On a donc trois cas à traiter :

1. $\kappa^2 \geq 2\lambda$

Dans ce cas, les quatre valeurs propres sont bien définies, distinctes, et réelles; la matrice est diagonalisable. Comment les conditions initiales et finales déterminent les coordonnées du vecteur solution $\vec{\delta}(t)$, exprimées dans la base de vecteurs propres ?

valeur propre coordonnée sur le vecteur propre associé

$$-u_- : \frac{e^{u_-(T-t)}(u_- + \kappa^2 - \lambda) \left(\frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} - \frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} \right)_{|t=0} - e^{-u_-t}(u_- + \kappa^2) (\delta\Phi_2 - \delta\Phi_1)_{|t=T}}{4(u_- \cosh(u_-T) + \kappa^2 \sinh(u_-T))} \quad (47)$$

$$u_- : \frac{e^{-u_-(T-t)}(u_- - \kappa^2 + \lambda) \left(\frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} - \frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} \right)_{|t=0} - e^{u_-t}(u_- - \kappa^2) (\delta\Phi_2 - \delta\Phi_1)_{|t=T}}{4(u_- \cosh(u_-T) + \kappa^2 \sinh(u_-T))} \quad (48)$$

$$-u_+ : \frac{e^{u_+(T-t)}(u_+ + \kappa^2 + \lambda) \left(\frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} + \frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} \right)_{|t=0} - e^{-u_+t}(u_+ + \kappa^2) (\delta\Phi_2 + \delta\Phi_1)_{|t=T}}{4(u_+ \cosh(u_+T) + \kappa^2 \sinh(u_+T))} \quad (49)$$

$$u_+ : \frac{e^{-u_+(T-t)}(u_+ - \kappa^2 - \lambda) \left(\frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} + \frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} \right)_{|t=0} - e^{u_+t}(u_+ - \kappa^2) (\delta\Phi_2 + \delta\Phi_1)_{|t=T}}{4(u_+ \cosh(u_+T) + \kappa^2 \sinh(u_+T))} \quad (50)$$

Plusieurs points méritent d'être soulevés quand à ces solutions.

— Les valeurs propres u_- et $-u_-$ ne concernent que les perturbations qui sont *en opposition de phase*,

$$(\delta\Phi_2 - \delta\Phi_1)_{t=T} \text{ et } \left(\frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} - \frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} \right)_{|t=0} \quad (51)$$

— Les valeurs propres u_+ et $-u_+$ ne concernent que les perturbations qui sont *en phase*,

$$(\delta\Phi_2 + \delta\Phi_1)_{t=T} \text{ et } \left(\frac{\delta m_2}{\sqrt{m_2^0}} + \frac{\delta m_1}{\sqrt{m_1^0}} \right)_{|t=0} \quad (52)$$

Si l'on compare les coefficients entre eux (en particulier les exponentielles), on obtient que

- le coefficient croissant sur les perturbation initiales en m est négligeable devant leur coefficient décroissant lorsque $0 \leq t \leq T$: la perturbation initiale est atténuée vers le futur.
- les coefficient croissants et décroissants sur la perturbation finale en Φ sont comparables lorsque $0 \leq t \leq T$. Leur combinaison dans la base initiale sera croissante : la perturbation finale est atténuée vers le passé.

En conclusion, contrairement à ce que la figure 2 peut laisser penser, l'état homogène est stable pour des perturbations de ce régime.

2. $\kappa^2 = 2\lambda$

Dans ce cas, deux des quatre valeurs propres deviennent nulles. Toutefois, la matrice est de rang trois : elle n'est pas diagonalisable. Pour autant, le problème reste bien défini : on peut le résoudre par une simplification de Jordan. La matrice de Jordan prend la forme

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_+ \end{pmatrix} \quad (53)$$

Les deux dernières coordonnées dans cette base gardent donc une évolution exponentielle, avec les valeurs propres $\pm u_+$. On verra toujours la même atténuation exponentielle sur ce sous-espace propre.

On peut résoudre indépendamment le sous-système concernant les deux premières coordonnées. On trouve alors que la seconde coordonnée est constante et la première a une évolution affine. En étudiant les conditions initiales et finales, on comprend aisément que l'évolution affine vient remplacer l'évolution en $\pm u_-$. En somme, sur ce sous-espace, l'atténuation exponentielle du régime précédent est remplacée par une évolution affine, beaucoup plus lente.

3. $\kappa^2 \leq 2\lambda$

Dans ce cas, deux valeurs propres sont imaginaires pures : $\pm u_- \triangleq \pm i\omega$, avec $\omega \triangleq \sqrt{2\lambda\kappa^2 - \kappa^4}$. La matrice n'est plus diagonalisable qu'en tant que matrice complexe, mais le problème reste bien défini : lorsqu'on repasse de la base de vecteurs propres dans la base naturelle, on obtient bien des solutions oscillantes réelles de pulsation ω . Dans ce cas, une perturbation peut être petite sur les conditions initiales et finale, et osciller violemment entre les deux, quitte à sortir même du régime linéaire. On recherche donc des instabilités sous la forme de divergences d'amplitude des solutions.

Les solutions prennent alors la même forme que (47), (48), (49), (50), en remplaçant u_- par $i\omega$. En observant (47) et (48), on se convainc aisément que les seuls ω instables sont ceux qui annulent les dénominateurs, et donc les solutions de l'équation

$$\cot \omega T = -\frac{\kappa^2}{\omega} \quad (54)$$

avec la condition

$$\omega^2 = 2\lambda\kappa^2 - \kappa^4 > 0 \quad (55)$$

Remarque 1. On peut reconnaître en (55) une relation de dispersion (plus précisément une relation de dispersion quartique et subluminaire). Avec cette relation, nous pouvons extraire plusieurs valeurs caractéristiques du système :

- En premier lieu, le terme quadratique en κ ($\propto k$) donne valeur caractéristique de célérité $c^2 \triangleq 2\lambda \frac{\hbar}{2\mu}$:

$$c \triangleq \sqrt{\frac{g\sqrt{m_1^0 m_2^0}}{\mu}} \quad (56)$$

— On a vu que le système changeait de régime en $\kappa^2 = 2\lambda$. On peut en déduire une valeur "critique" de k :

$$k_c \triangleq \frac{2c}{\sigma^2} \quad (57)$$

— On peut alors écrire (55) sous la forme

$$\omega^2 = c^2 \left(|\vec{k}|^2 - \frac{|\vec{k}|^4}{k_c^2} \right) \quad (58)$$

— Enfin, il existe une pulsation maximale

$$\omega_{max} \triangleq \lambda \quad (59)$$

Cette pulsation est réalisée pour $\kappa = \sqrt{\lambda}$ (i.e. $k = \frac{\sqrt{2}c}{\sigma^2} = \frac{k_c}{\sqrt{2}}$)

L'équation (54) n'a pas de solution analytique, mais on peut tout de même en tirer quelques informations sur les solutions. Pour cela, il suffit de tracer les chaque membre de l'équation, et d'observer les points d'intersection :

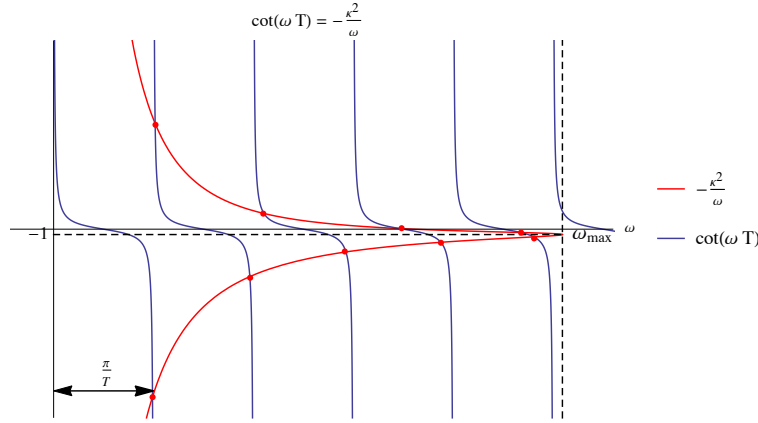


FIGURE 3 – Représentation graphique de l'équation (54). Ici, on a pris $T = \frac{15}{\lambda}$.

en observant la figure 3, on peut arriver aux conclusions suivantes sur les solutions $\{\omega_n\}_{1 \leq n \leq N_{sol}}$:

- Il y a d'autant plus de solutions que T est grand ($N_{sol} = 2 \lfloor \frac{\omega_{max} T}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$)
- plus T est grand, plus les plus basses fréquence sont proches de $\frac{n\pi}{T}$
- Sur les branches suivantes du cot, les solutions se rapprochent progressivement de $\frac{\pi}{4T}(4n - 1)$.

On ne peut pas encore affirmer que l'une de ces solutions sera privilégiée sur les autres. Toutefois, la solution de plus basse énergie (i.e. de plus basse fréquence) correspond à une évolution ressemblant à une demi-période de sinusoïde : les deux populations se séparent, puis se rassemblent pour revenir à la condition finale faiblement perturbée.

Remarque 2. Dans l'analyse d'instabilité linéaire traditionnelle, une petite perturbation croît jusqu'à sortir du régime linéaire, ce qui rend la solution trouvée valable au moins jusqu'à un certain temps. Ici, les conditions aux limites mixtes imposent de prendre en compte la durée impartie dans sa globalité : lorsqu'une solution devient singulière, c'est la solution toute entière qui est mal définie. Dans une certaine mesure, cela ressemble plus à une résonance, puisque c'est une amplitude d'oscillation qui diverge.

Toutefois, c'est un cas bien particulier de résonance qui ne dépend pas de la géométrie ni des conditions de bord du système. A la place, elle ne dépend que du temps impartie T .

En physique, on observe une résonance lorsqu'une onde incidente est réfléchiée par les conditions de bord de chaque côté d'une cavité. Ici, on peut imaginer que ce sont les conditions au limite temporelles qui tiennent ce rôle. En d'autres termes, dans un temps fictif correspondant au temps dans lequel raisonnent les joueurs, la perturbation sur la condition finale à $t = T$ est propagée en oscillant jusqu'à $t = 0$, la condition initiale étant fixée, une oscillation réfléchiée de phase et d'amplitude différente apparaît pour corriger, qui se propage dans l'autre sens, etc. jusqu'à former la solution. A certaines longueurs d'onde, cette boucle de rétroaction ne s'arrête jamais d'amplifier la solution, et on observe une résonance.

4 Conclusion et perspectives

En conclusion, l'analyse d'instabilité linéaire a été très utile, malgré les conditions mixtes (finales et initiales) qui constituent la différence majeure entre la physique et nos modèles (encore simples) de MFG.

On a pu déterminer différentes valeurs caractéristiques intéressantes pour comprendre le comportement du système : la célérité des ondes c , l'échelle de dispersion k_c , la fréquence maximale ω_{max} . Toutefois, les fréquences instables que l'on a trouvé ici – non contentes d'être nombreuses et de se refuser à un traitement analytique même dans un cas simple – sont très dépendantes de la durée T de l'expérience.

Plusieurs questions subsistent donc :

- Peut-on déterminer l'instabilité qui sera sélectionnée par le système dans notre cas ? Pour l'instant, la poursuite de cette piste de réflexion serait de trouver la forme des solutions ergodique pour le problème non linéaire, aux fréquences instables. On pourra ensuite construire un *ansatz* adapté sur les solutions, et appliquer des méthodes variationnelles.
- Quelles conséquences aurait une rupture de symétrie entre les deux populations (bruits σ_i ou inerties μ_i différents entre les populations) ?
- Peut-on traiter un modèle plus réaliste d'une manière analogue ? Un modèle avec une durée infinie, et une préférence pour le présent, par exemple (une préférence pour le présent prend la forme d'une exponentielle décroissante en facteur dans l'intégrale de coût de (25)).
- Peut-on trouver une fonctionnelle de coût plus proche de l'idée originale de Schelling, et qui garde des propriétés de continuité satisfaisantes ?

Références

- [1] "Interview of H. E. Stanley on Econophysics", *IIM Kozhikode Society & Management Review, Sage publication (USA)*, Vol. 2, Issue 2 (July), 73-78 (2013)
- [2] E. Farjoun, M. Machover, *Laws of Chaos : a probabilistic approach to political economy*, Verso Books (1987).
- [3] J. Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press (1944).
- [4] O.Guéant, J.-M.Lasry, P.-L.Lions "Mean-Field Games and Applications", *Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance*, 2003, (2010).
- [5] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Comptes Rendus Mathématique*, 343, 619 (2006).
- [6] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, *Comptes Rendus Mathématique*, 343, 679 (2006).
- [7] M. Huang, R. P. Malhamé, P. E. Caines, and others, *Communications in Information & Systems*, 6, 221 (2006).
- [8] P. Cardaliaguet, J. Lasry, P. Lions, and A. Porretta, *SIAM Journal on Control and Optimization* 51, 3558 (2013), <http://dx.doi.org/10.1137/120904184>.
- [9] I.Swiecicki, T.Gobron, D.Ullmo, "Schrödinger Approach to Mean Field Games", *Phys. Rev. Lett.*, 116, 128701 (23/03/2016)
- [10] T.Schelling "Dynamic models of segregation", *Journal of Mathematical Sociology*, 1 (pp. 143-186) (1971)
- [11] M.Cirant, G.Verzini "Bifurcation and segregation in quadratic two-populations Mean Field Games systems", <http://arxiv.org/abs/1511.09343>
- [12] M.Cirant "Multi-population Mean Field Games systems with aversion" <http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/seminari/mdn/PRESENTAZIONI/Cirant14.pdf>.