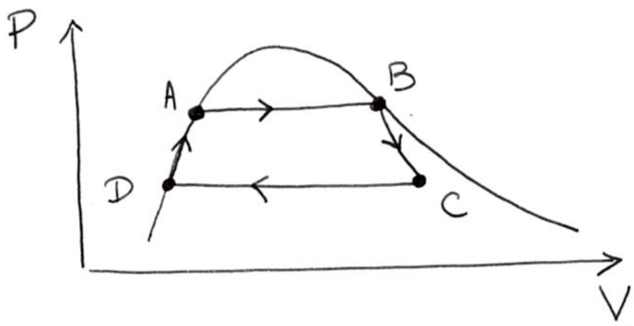
Machine à vapeur



- $D \to A$ = réversible $TdS = \delta Q_{rev} \overset{ici}{=} mc\,dT$ soit $S_A - S_D = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$
$= 1{,}098$ kJ.K^{-1}

- $A \to B$ = $TdS = \delta Q_{rev} \overset{ici}{=} \delta m L_2$
soit $S_B - S_A = \frac{mL_2}{T_2} = 3{,}897$ kJ.K^{-1}

- $S_C = S_B$ (adiabatique réversible)

- $C \to D$ on a $S_C - S_D = \frac{x\,m\,L_1}{T_1}$ (en $C = \left[\begin{array}{l}(1-x)m \text{ liquide} \\ x\,m \text{ gazeux}\end{array}\right.$)

- le fait que l'on soit sur un cycle se traduit par :

$$S_D = S_A - mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = S_B - \frac{mL_2}{T_2} - mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

et

$$S_D = S_C - \frac{x\,m\,L_1}{T_1} = S_B - x\frac{mL_1}{T_1}$$

d'où $x = \frac{T_1}{T_2}\frac{L_2}{L_1} + \frac{cT_1}{L_1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0.824$ ($1 - x = 0.176$)

③ $Q_2 = mc(T_2 - T_1) + mL_2 = 2\,358$ kJ

$Q_1 = -\,x\,m L_1 = -1862$ kJ

comme entre B et C la chaleur reçue est nulle, au cours du cycle on reçoit $Q = Q_1 + Q_2$. D'où $0 = \Delta U = W + Q$ qui donne $W = -Q_1 - Q_2 = -496$ kJ

$\eta = \frac{-W}{Q_2} = 0{,}21$ alors que $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0{,}23$

Paradoxe de l'isolant

* $\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \dfrac{dT}{dr} \vec{e_r}$ λ s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$

* bilan thermique en régime stationnaire :

$$2\pi r J(r) = 2\pi (r+dr) \underbrace{J(r+dr)}_{J(r) + dr\frac{dJ}{dr}}$$

soit, en ne gardant que les termes d'ordre dr :

$$J + r\frac{dJ}{dr} = 0$$

cela s'écrit $\dfrac{d}{dr}(rJ) = 0$ soit $\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) = 0$

la solution est de la forme $T(r) = A \ln r + B$. En imposant $\begin{cases} T(a_1) = T_1 \\ T(a_2) = T_2 \end{cases}$

cela donne : $T(r) = T_1 - \dfrac{T_1 - T_2}{\ln(a_2/a_1)} \ln(r/a_1)$

* la densité de courant thermique en a_2 est : $J = -\lambda \left.\dfrac{dT}{dr}\right)_{a_2} = h(T_2 - T_a)$

cela permet de déterminer T_2 :

$J(a_2) = \lambda \dfrac{T_1 - T_2}{a_2 \ln(a_2/a_1)} = h(T_2 - T_a)$ soit $T_2\left(h + \dfrac{\lambda/a_2}{\ln(a_2/a_1)}\right) = T_1 \dfrac{\lambda/a_2}{\ln(a_2/a_1)} + hT_a$

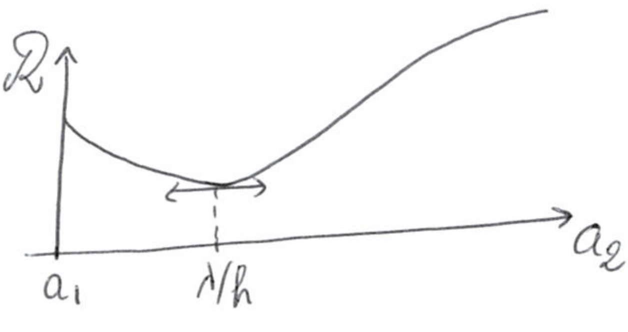
* on écrit $T_1 - T_2 = \mathcal{R}_1 \Phi$ et $T_2 - T_a = \mathcal{R}_2 \Phi$ avec $\Phi = 2\pi a_2 L \, J(a_2)$

en combinant ces 2 eqs on obtient : $T_1 - T_a = \mathcal{R}\Phi$ avec

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{1}{h a_2}\right)$$

$$\frac{d\mathcal{R}}{da_2} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda a_2} - \frac{1}{h(a_2)^2}\right) = \frac{d\mathcal{R}}{da_2} < 0 \text{ pour } a_2 < \lambda/h$$

lorsque $a_1 < \lambda/h$ on a donc l'allure



d'où le paradoxe : à T_1 et T_a fixés $\Phi \propto \mathcal{R}^{-1}$: donc pour $a_1 < a_2 < \lambda/h$ le flux thermique augmente malgrés l'isolation !