Cherenkov

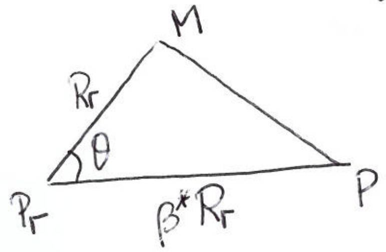
$\varepsilon_0^* = \varepsilon_0 n^2$ et $c^{*2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 n^2} = \left(\dfrac{c}{n}\right)^2$

- donc d'après la formule de l'énoncé, dans un milieu diélectrique : $\Phi(M,t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0^*} \dfrac{1}{R_r(1 - \hat{R}_r \cdot \vec{\beta}^*)}$ où $\vec{\beta}^* = \vec{v}/c^*$

cette expression diverge lorsque $\hat{R}_r \cdot \vec{\beta}^* = 1 = \dfrac{v}{c^*}\cos\theta$ (où θ est défini sur la figure de l'énoncé)

cette égalité ne peut être vérifiée que si $v > c^*$ et la direction θ où le champ diverge est alors définie par $\boxed{\cos\theta = c^*/v = \dfrac{c}{nv}}$

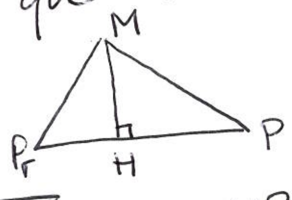
- dans le cas où $v > c^*$ on a $\beta^* > 1$ d'où l'allure de la figure dans le cas qui nous intéresse :



on a $\dfrac{P_rM}{P_rP} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{définition de} \\ \text{l'instant retardé}}}{=} \dfrac{1}{\beta^*} = \cos\theta$ ← (pour l'angle où $\Phi(M)$ diverge)

la relation $\dfrac{P_r M}{P_r P} = \cos\theta$ montre que P_rMP est rectangle en M (et pour l'angle θ = P_rM = côté adjacent et P_rP = hypothénuse)

remarque : on peut démontrer que $\widehat{P_rMP} = \pi/2$ par applications successives de Pythagore :

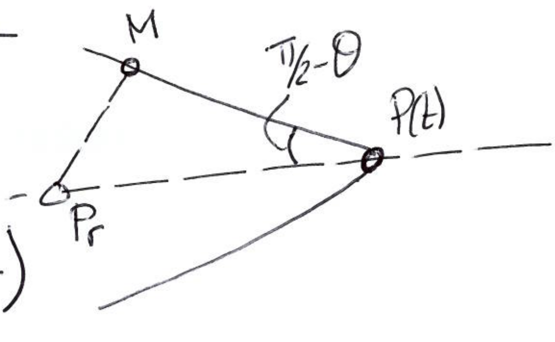


on trouve $P_rH = R_r\cos\theta = \dfrac{1}{\beta^*} R_r$

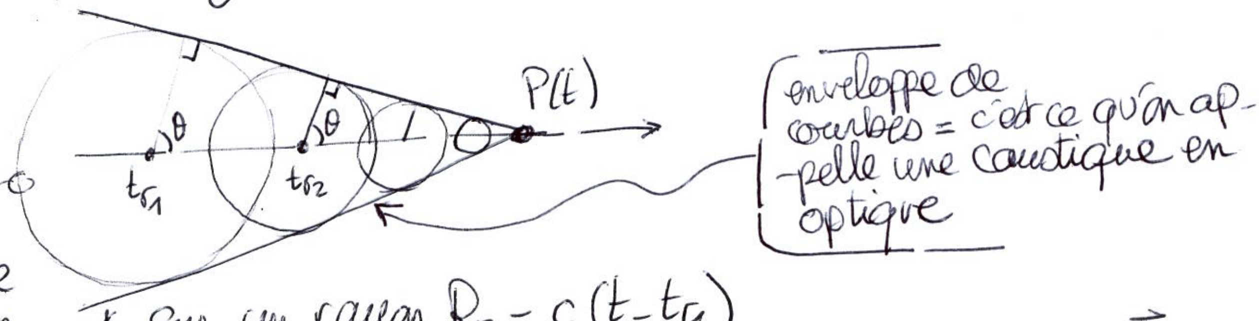
$MH = R_r \sin\theta = R_r\sqrt{1 - \dfrac{1}{\beta^{*2}}}$ puis $MP = \sqrt{MH^2 + HP^2} = \sqrt{\beta^{*2} - 1}\, R_r$

et enfin on peut donc vérifier que $P_rP^2 = P_rM^2 + MP^2$

on a donc la construction : le champ qui diverge en M à l'instant t correspond à un rayonnement émis en $P_r = P(t_r)$



d'après la construction géométrique, $\forall t_r$ le point où le champ diverge est sur le cône on a =



propage à vitesse c^* sur un rayon $R_r = c(t - t_{r_1})$

3/ les eqs. de propagation des champs sont $\left(\frac{1}{c^{*2}}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right)\left\{\begin{matrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{matrix}\right\} = \vec{0}$

standard = il suffit d'utiliser $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge \ldots) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\ldots) - \vec{\nabla}^2 \ldots$

si on cherche des solutions en ondes plane $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

on trouvera donc que $|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^{*2}}$ soit $|\vec{k}| = n\omega/c$ - Donc le quadri-vecteur d'onde d'un photon sera $\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$ avec $\vec{k} = \frac{n\omega}{c}\vec{u}$ ($|\vec{u}| = 1$ = $\vec{u}$ = direction de propagation) et la quadri-impulsion correspondante $\underline{P}_\gamma = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar n\omega}{c}\vec{u}\right)$.

pour la particule initiale $\underline{P}_e = \left(\frac{E_e}{c}, \vec{p}_e\right)$ avec $\begin{cases}\vec{p}_e = m\gamma\vec{v}\\ E_e = m\gamma c^2\end{cases}$

la conservation de la q impulsion s'écrit:

$\underline{P}_e = \underline{P}'_e + \underline{P}_\gamma$ soit $\underline{P}'_e = \underline{P}_e - \underline{P}_\gamma$

en élevant au carré = $\underbrace{\underline{P}'^2_e}_{mc^2} = \underbrace{\underline{P}_e^2}_{mc^2} + \underbrace{\underline{P}_\gamma^2}_{\hbar^2\frac{\omega^2}{c^2}(1-n^2)} - 2\,\underline{P}_e\cdot\underline{P}_\gamma$

donc $\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2}(1 - n^2) = 2\,\underline{P}_e\underline{P}_\gamma = 2\left(m\gamma c\,\frac{\hbar\omega}{c} - \underbrace{\hbar\omega\frac{n}{c}}_{|\vec{p}_\gamma|}\cdot\underbrace{m\gamma\beta c}_{|\vec{p}_e|}\cdot\cos\theta\right)$

d'où immédiatement $\boxed{\cos\theta = \frac{1}{n\beta}\left\{1 + \frac{\hbar\omega}{2\gamma mc^2}(n^2 - 1)\right\}}$

ordre de grandeur de $\frac{\hbar\omega}{2\gamma mc^2}(n^2-1)$:

on utilise $\hbar c \simeq 200$ MeV.fm $\leadsto \hbar\omega = \hbar c . 2\pi . \frac{\omega}{2\pi c} = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda}$

donc $\frac{\hbar\omega}{2\gamma mc^2}(n^2-1) = \frac{\pi}{\gamma}\frac{\hbar c}{\lambda_0 mc^2}(n^2-1) = \frac{\pi \times 200 \text{ MeV.fm} \times (1.33^2-1)}{\gamma \times 0.46\, 10^{+9} \text{ fm} \times 0.511 \text{ MeV}}$

$\simeq \frac{2\,10^{-6}}{\gamma} \ll 1$ (se souvenir que $\gamma > 1$)

On écrit donc $\cos\theta = \frac{1}{n\beta}$ ← ce n'est bien sûr possible que si $n\beta > 1$ soit $v > c/n$. On retrouve la même condition d'émission Cherenkov et le même angle d'émission

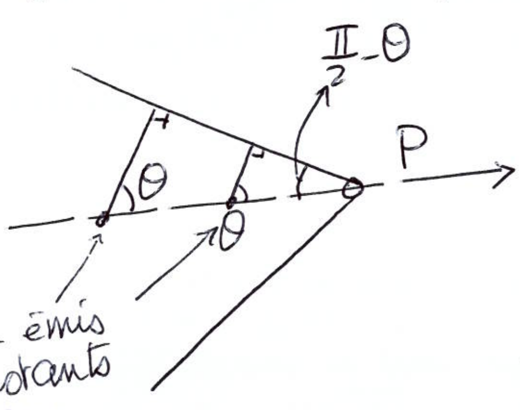
- si on considère des $\bar{e}$ d'énergie $E_e \sim 1$ MeV (ie $\gamma \sim 2$, $\beta \sim \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$)

pour un photon émis bleu on a :

$\hbar\omega = 2\pi\frac{\hbar c}{\lambda} = 2\pi \frac{200 \text{ MeV.fm}}{0.46\ 10^9 \text{ fm}} = 2.7\ 10^{-6} \text{ MeV} \ll E_e$

et donc $|\vec{p}_\gamma| = \frac{\hbar\omega n}{c} \ll |\vec{p}_e| = m\gamma v = \frac{E_e}{c}\times\beta$

l'é qui a émis un photon garde pratiquement la m̂ impulsion = il a une trajectoire quasiment rectiligne uniforme. On a donc la même construction qu'à la question 2/



on a :

$0 < \theta = \arccos\left(\frac{c}{nv}\right) < \arccos\left(\frac{1}{n}\right)$

$(v = c/n)$ $\quad$ $(v=c)$

soit

$\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi/2$

$(v=c)$ $\quad$ $(v = c/n)$

pour $n = 1.33$ cela vaut 48°