Particule dans champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

PEB 1

① ici $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E/c & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ E/c & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad m \dfrac{dU^\mu}{d\tau} = q F^{\mu\nu} U_\nu$ soit :

$$m \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} U_0 \\ -U_1 \\ -U_2 \\ -U_3 \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E/c & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ E/c & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} -\frac{E}{c}U_2 \\ -BU_2 \\ \frac{E}{c}U_0 + BU_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$d\tau = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$

$\Omega = BcU_0 + EU_1 \qquad \dfrac{d\Omega}{d\tau} = Bc\dfrac{dU_0}{d\tau} + E\dfrac{dU_1}{d\tau} = \dfrac{q}{m}\left(Bc\left(-\frac{E}{c}U_2\right) + EBU_2\right) = 0$

comme $U_\mu = \gamma(c, -\vec{v})$ on a $\Omega = \gamma_0(Bc^2 - Ev_{x0})$

③ $(EU_0 + BcU_1)^2 - (E^2 - B^2c^2)(U_2)^2 = E^2U_0^2 + B^2c^2U_1^2 + 2EBcU_0U_1 - (E^2 - B^2c^2)U_2^2$

avec la normalisation de $\underline{U}$: $U_0^2 - \vec{U}^2 = c^2$ cad comme ici $U_3 \equiv 0$:
$U_2^2 = U_0^2 - U_1^2 - c^2$

donc la quantité ci-dessus s'écrit $= \underbrace{B^2c^2U_0^2 + E^2U_1^2 + 2EBcU_0U_1}_{\Omega^2 \text{ (cf. (B1))}} + (E^2 - B^2c^2)c^2 = \Omega^2 + (E^2 - B^2c^2)c^2$

↓ on vient de démontrer (B2).

④ si $Bc > E$ alors (B2) s'écrit :

$$(EU_0 + BcU_1)^2 + (B^2c^2 - E^2)(U_2)^2 = \underbrace{\Omega^2 + (E^2 - B^2c^2)c^2}_{\text{constante}}$$

constante. cette c^{ste} est > 0 d'après la forme du membre de gauche.

donc on peut écrire :

$$\boxed{\begin{cases} EU_0 + BcU_1 = \mu\cos\chi \\ \sqrt{B^2c^2 - E^2}\,U_2 = \mu\sin\chi \end{cases}}$$

où $\mu^2 = \Omega^2 + (E^2 - B^2c^2)c^2$ est une constante en dérivant la seconde equation $\frac{d}{d\tau}$ =

$$\sqrt{B^2c^2-E^2}\,\frac{dU_2}{d\tau} = \underbrace{\mu\cos\chi}_{EU_0+BcU_1 \text{ d'après la } 1^{re} \text{ eq.}}\,\frac{d\chi}{d\tau}$$

$\frac{dU_2}{d\tau} \to -\frac{q}{m}\left(\frac{E}{c}U_0+BU_1\right)$ d'après les eqs du mvt.

on obtient donc immédiatement :

$$\boxed{\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{q}{mc}\sqrt{B^2c^2-E^2}}$$

= invariant de Lorentz car q, m, c et $B^2c^2-E^2$ le sont

(b) on se place dans le cas où $U_1|_{\tau=0} = 0 = U_2|_{\tau=0}$ et dans ce cas $v_{x0}=0$, $\gamma_0=1$ et donc $\Omega = Bc^2$. on a également $\mu^2 = \Omega^2+(E^2-B^2c^2)c^2 = E^2c^2$.

avec la condition initiale sur U_1 et la seconde des relations (B3) on obtient =

$$\boxed{U_2 = -\frac{Ec}{\sqrt{B^2c^2-E^2}}\sin(\omega\tau)}$$

puis = $\begin{cases} BcU_0+EU_1 = \Omega = Bc^2 & \text{(c'est B1)} \\ EU_0+BcU_1 \underset{\uparrow}{=} \mu\cos\chi \overset{\text{ici}}{=} Ec\cos(\omega\tau) \\ \quad\quad (B3) \end{cases}$

ce système est facile à résoudre. On obtient immédiatement

$(B^2c^2-E^2)U_0 = B^2c^3-E^2c\cos(\omega\tau)$ et $(B^2c^2-E^2)U_1 = EBc^2\cos(\omega\tau)-EBc^2$

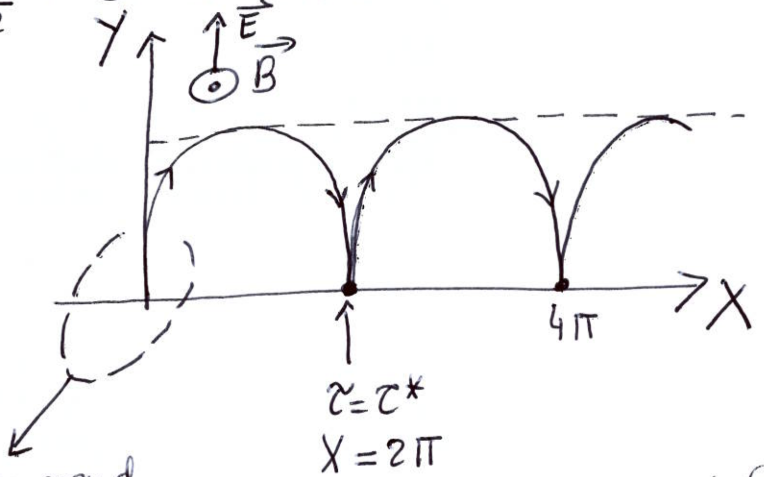
soit $\boxed{U_1 = \frac{EBc^2}{B^2c^2-E^2}\left[\cos(\omega\tau)-1\right]}$ et $\boxed{U_0 = \frac{c}{B^2c^2-E^2}\left(B^2c^2-E^2\cos(\omega\tau)\right)}$

Tout cela est periodique, avec une nouvelle annulation de la vitesse lorsque $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

on a $\begin{cases} v_2 = + \dfrac{dX_2}{d\tau} = - \dfrac{dy}{d\tau} = - \dfrac{E}{\sqrt{B^2c^2-E^2}} \; c \sin(\omega\tau) \\ \text{et} \\ v_1 = \dfrac{EBc}{B^2c^2-E^2} \; c\left(\cos(\omega\tau) - 1\right) = - \dfrac{dx}{d\tau} \end{cases}$

on prend $x(\tau=0) = 0 = y(\tau=0)$ alors cela conduit immédiatement aux expressions : $\begin{cases} x(\tau) = \dfrac{EBc}{B^2c^2-E^2} \; \dfrac{c}{\omega} \left(\omega\tau - \sin(\omega\tau)\right) \\ y(\tau) = \dfrac{E}{\sqrt{B^2c^2-E^2}} \; \dfrac{c}{\omega} \left(1 - \cos(\omega\tau)\right) \end{cases}$

Dans ces expressions les facteurs $\dfrac{EBc}{B^2c^2-E^2}$ et $\dfrac{E}{\sqrt{B^2c^2-E^2}}$ sont sans dimension et $\dfrac{c}{\omega}$ a les dimensions d'une longueur. Pour re présenter l'allure de la trajectoire je plotte $X = x \Big/ \dfrac{EBc}{B^2c^2-E^2} \times \dfrac{c}{\omega}$ et $Y = \dfrac{\omega y}{c} \Big/ \dfrac{E}{\sqrt{B^2c^2-E^2}}$. on a alors :



(dessin pour $q>0$)

au début on comprend bien ce qui se passe : la particule est immobile, elle subit $q\vec{E} \,//\, \vec{e}_y$: elle est accélérée vers le haut, mais la force $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ infléchit son mouvement vers la droite on peut vérifier la conservation de l'énergie de la particule. on a $\mathcal{E} = \underbrace{m\gamma c^2}_{= mcU^0} + q\phi$

ici clairement $\vec{A}(\vec{r})$ est indépendant de t et $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ donc $\phi = -Ey + C^{ste}$

on a donc $\mathcal{E} = mcU^0 - qEy$ (j'ai choisi de prendre la C^{ste} nulle)

$$= \frac{mc^2}{B^2c^2 - E^2}\left(B^2c^2 - E^2\cos(\omega\tau)\right) - \frac{qE^2}{\sqrt{B^2c^2-E^2}}\frac{c}{\omega}\left(1-\cos(\omega\tau)\right)$$

le terme en $\cos(\omega\tau)$ est $= \frac{E^2}{B^2c^2-E^2}\underbrace{\left(-mc^2 + \frac{qc}{\omega}\sqrt{B^2c^2-E^2}\right)}_{\text{nul puisque } \omega = \frac{q\sqrt{B^2c^2-E^2}}{mc}} = 0$

l'énergie est bien conservée.

il reste donc

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{B^2c^2-E^2}B^2c^2 - \underbrace{\frac{qE^2}{\sqrt{B^2c^2-E^2}} \times \frac{c}{\omega}}_{\frac{mc^2 \times E^2}{\sqrt{B^2c^2-E^2}}}$$

donc $\boxed{\mathcal{E} = mc^2}$

c'est bien normal puisque à $\tau = 0$ la vitesse est nulle ~~donc~~ ($\gamma = 1$) et $y = 0$ (donc $\phi \equiv 0$)

* finalement : comment relier t à τ ?

on a $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2} = dt/\gamma$ or $U^\mu = (U^0, \vec{U}) = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ donc

$$dt = \gamma d\tau = \frac{U^0}{c}d\tau = \frac{B^2c^2 - E^2\cos(\omega\tau)}{B^2c^2-E^2}d\tau$$

on prend $t = 0$ à $\tau = 0$ donc $\boxed{t = \frac{B^2c^2\tau - E^2/\omega \sin(\omega\tau)}{B^2c^2 - E^2}}$