Fusée relativiste

Q1/ $\underset{\sim}{P} = m \dfrac{d\underset{\sim}{X}}{d\tau}$ où $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$ est l'intervalle de temps propre

donc $\underset{\sim}{P} = m\gamma(c, \vec{v}) = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right)$ et $\vec{p} = m\gamma\vec{v} = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}$

Q2/ $\underset{\sim}{\Gamma} = \dfrac{d\underset{\sim}{U}}{d\tau} = \gamma \dfrac{d}{dt}(\gamma c, \gamma\vec{v})$ $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ donc $\dfrac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv}{dt}$

on a également $\dfrac{d(\gamma v)}{dt} = \gamma^3 \dfrac{v^2}{c^2}\dfrac{dv}{dt} + \gamma \dfrac{dv}{dt} = \gamma^3 \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \underset{\sim}{\Gamma} = \left(\gamma^4 \dfrac{v}{c}\dfrac{dv}{dt}, \gamma^4 \dfrac{dv}{dt}\right)$

si l'on fait une transf. de Lorentz vers le réf. inertiel commobile avec le réf. propre à l'instant considéré on a :

$$\underset{\sim}{\Gamma_0} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \underset{\sim}{\Gamma} = \gamma^4 \frac{dv}{dt} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma^4 \frac{dv}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\beta^2)\gamma = \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^3 \frac{dv}{dt}(0, 1)$$

1/ $$\underset{\sim}{P_0} = \begin{pmatrix} Mc = \frac{\mathcal{E}_0}{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M+dM)c = \frac{\mathcal{E}_0 + d\mathcal{E}_0}{c} \\ dp_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dm\,\gamma_0 c \\ -dm\,\gamma_0 u_0 \end{pmatrix}$$

il faut raisonner dans le réf. inertiel commobile avec $\mathcal{R}_0$ avant l'éjection du gaz.

donc $d\mathcal{E}_0 = -dm\,\gamma_0 c^2$, $dp_0 = dm\,\gamma_0 u_0$ et $dM = -\gamma_0\, dm$

si on revient dans le réf. $\mathcal{R}$: $\begin{pmatrix} d\mathcal{E}/c \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\mathcal{E}_0/c \\ dp_0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} d\mathcal{E} = \gamma(d\mathcal{E}_0 + \beta c\, dp_0) = \gamma\gamma_0\, dm\,[u_0 v - c^2] \\ dp = \gamma\left(\frac{\beta}{c} d\mathcal{E}_0 + dp_0\right) = \gamma\gamma_0\, dm\,[u_0 - v] \end{cases}$

en écrivant (cf Q1/) $p = \dfrac{\mathcal{E}}{c^2} v$ on a $dp = (\mathcal{E}\, dv + v\, d\mathcal{E})/c^2$

soit $dv = (c^2 dp - v\, d\mathcal{E})/\mathcal{E}$ où $\mathcal{E} = M\gamma c^2$

cela donne : $dv = \dfrac{1}{Mc^2}\left[\cancel{c\beta\, d\mathcal{E}_0} + c^2 dp_0 - \cancel{v\, d\mathcal{E}_0} - v^2 dp_0\right] = \dfrac{c^2 - v^2}{Mc^2} dp_0$

$$= \frac{c^2 - v^2}{M} dm\,\gamma_0 \frac{u_0}{c^2} = -u_0\left(1 - v^2/c^2\right)\frac{dM}{M}$$

soit $\boxed{\dfrac{dv}{1 - v^2/c^2} = -u_0 \dfrac{dM}{M}}$

pour intégrer on pose $v/c = \text{th}\,\theta$ soit

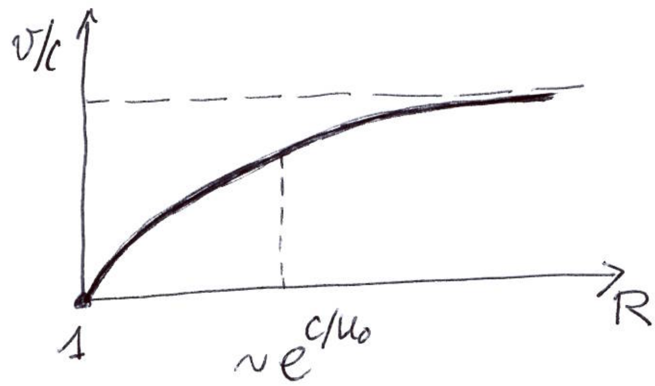
$\dfrac{dv}{c} = (1 - \text{th}^2\theta)\, d\theta = (1 - v^2/c^2)\, d\theta$

.../...

donc $\dfrac{dv}{1-v^2/c^2} = c\,d\theta = -u_0 \dfrac{dM}{M} \rightarrow \theta = -\dfrac{u_0}{c} \ln\left(\dfrac{M}{M_0}\right) = \ln\left[R^{u_0/c}\right]$ FR2

et $\dfrac{v}{c} = \text{th}\,\theta = \dfrac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}$ soit $\boxed{\dfrac{v}{c} = \dfrac{R^{2u_0/c}-1}{R^{2u_0/c}+1}}$ où $R = \dfrac{M_0}{M} \geq 1$

- si R est proche de 1 alors v/c est petit et en utilisant $\text{th}\,\theta \simeq \theta$ cela donne $v \simeq u_0 \ln R$ (lorsque $\dfrac{u_0}{c} \ln R \ll 1$)
- limite $\ln R \to \infty$ alors $v \to c$. C'est obtenu pour $\dfrac{u_0}{c} \ln R \gg 1$ soit $R \gg e^{c/u_0}$. On a donc :



3/ d'après la question 02/ "accélération propre constante $= a_0$" s'écrit :

$$\frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = a_0\,dt \quad \text{soit} \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = a_0 t$$

$\left(\text{en utilisant } \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

c-à-d : $\boxed{v/c = \dfrac{a_0 t/c}{\sqrt{1+(a_0 t/c)^2}}}$

l'éq. $\dfrac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = a_0\,dt$ s'écrit $\dfrac{dv}{1-v^2/c^2} = a_0\,d\tau$

en comparant avec $\dfrac{dv}{1-v^2/c^2} = -u_0 \dfrac{dM}{M}$ il vient $\dfrac{dM}{M} = -\dfrac{a_0}{u_0}\,d\tau$

soit $\boxed{M = M_0 \exp\left(-\dfrac{a_0 \tau}{u_0}\right)}$