Volume sphère chargée

$\delta W_{elec}^{(rev)} = \varphi dq \quad \delta W_{press}^{(rev)} = -PdV \quad$ et $\delta Q^{(rev)} = TdS$

donc $dU = TdS - PdV + \varphi dq$ (formule établie dans le cas réversible mais tjs valable)

puis $dG = -SdT + VdP - q d\varphi$ et, avec le lemme de Schwarz :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{P,T} = -\left(\frac{\partial q}{\partial P}\right)_{\varphi,T} = -4\pi\varepsilon_0 \varphi \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{\varphi,T}$$

puisque $q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi$

comme $V \propto R^3$ la dérivée log donne : $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\varphi,T} = \frac{3}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{\varphi,T}$

cela permet d'écrire :

$$\left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)_{\varphi,T} = -\frac{R}{3}\chi_T$$

d'où le résultat :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{P,T} = \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 R\varphi\chi_T$$

<u>AN :</u> ici $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_{P,T} d\varphi$ en supposant que R varie peu, cela s'écrit :

$$\Delta V \simeq \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 R\chi_T \underbrace{\int_0^{\varphi_m} \varphi d\varphi}_{\varphi_m^2/2}$$

et $\frac{\Delta V}{V} = \frac{4/3\,\pi\varepsilon_0 R\chi_T}{4/3\,\pi R^3}\,\varphi_m^2/2 = \frac{\varepsilon_0\chi_T}{2R^2}\varphi_m^2 = 4.4\,10^{-7}$ (on a eu raison de supposer $R = C^{ste}$)

PS : calcul sans approx. $R = C^{ste}$: $dV = 4\pi R^2 dR = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0\chi_T R\varphi d\varphi$

soit $\int_{R_i}^{R_f} R dR = \frac{\varepsilon_0\chi_T}{3}\int_0^{\varphi_m}\varphi d\varphi$

donc $R_f^2 = R_i^2 + \frac{\varepsilon_0\chi_T}{3}\varphi_m^2$ (exact) et effectivement $\frac{\Delta R}{R} \simeq \frac{\varepsilon_0\chi_T}{6R^2}\varphi_m^2 = \frac{1}{3}\frac{\Delta V}{V}$