EXAMEN de RELATIVITÉ RESTREINTE

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A $\simeq$ 5 pts ; B $\simeq$ 15 pts.

La question 2/ de l'exercice A peut être traitée en admettant le résultat de la question 1/(a).
Dans l'exercice B, la question 2/ est indépendante de la question 1/ et la question 4/ peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes. La question 5/(a) est indépendante de tout ce qui la précède.

A Invariants du champ électromagnétique

Soit un champ électromagnétique $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$. On construit le champ vectoriel complexe $\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{E} - ic\vec{B}$ (on appelle parfois $\vec{D}$ le vecteur de Riemann–Silberstein).

1/ Boost de Lorentz :

(a) Montrer que, lors d'une transformation spéciale de Lorentz le long de Ox (cf. formulaire en fin d'énoncé), le vecteur $\vec{D}$ subit une rotation d'un angle imaginaire $i\theta$ autour de l'axe Ox.

(b) Exprimer θ en fonction des paramètres β et/ou γ qui caractérisent le changement de référentiel.

2/ En se souvenant qu'une rotation conserve le produit scalaire[1], donner deux quantités scalaires construites sur les champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ qui restent invariantes lors d'un changement de référentiel quelconque (pas nécessairement un boost de Lorentz).

B Voilier cosmique

On considère un vaisseau spatial équipé d'une voile réfléchissante. Il est propulsé par la réflexion sur sa voile de photons émis par un laser basé sur Terre.

La trajectoire du vaisseau est portée par l'axe Ox qui passe par le centre de la Terre et qui est aussi l'axe du faisceau laser. Le problème étant uni-dimensionnel on notera les quadri-vecteurs avec seulement 2 composantes : une pour la partie temporelle et une pour la partie spatiale (sans vecteur sur cette composante). Dans tout le problème on travaillera dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la Terre.

1/ On considère 2 photons émis avec un intervalle de temps Δt_{e} depuis la Terre.

(a) Représenter sur un diagramme de Minkowski dans $\mathcal{R}$ la ligne d'univers du vaisseau[2] et celles des deux photons.

(b) Montrer que les deux photons sont reçus sur le vaisseau avec un intervalle Δt dont on donnera l'expression en fonction de Δt_{e} et $\beta = v/c$.

(c) En déduire que si le laser émet avec une puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{e}}$, le rayonnement est reçu sur la voile avec une puissance $\mathcal{P}$ différente[3]. Exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de $\mathcal{P}_{\mathrm{e}}$ et de β.

[1] Résultat qui reste valable même pour une rotation d'un angle complexe.

[2] Pour simplifier, on supposera dans la question 1/ (et seulement pour cette question !) que la vitesse v du vaisseau est constante.

[3] Les puissances $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{e}}$ sont toutes deux évaluées dans le même référentiel $\mathcal{R}$: il n'y a pas d'effet Doppler des photons à prendre en compte.

2/ Dans cette question on étudie la reflexion d'un photon sur la voile.

Soient $(\mathcal{E}_\gamma/c, \mathcal{E}_\gamma/c)$ et $(\mathcal{E}'_\gamma/c, -\mathcal{E}'_\gamma/c)$ les quadri-impulsions du photon avant et après la réflexion.

On notera $(\mathcal{E}/c, p)$ et $(\mathcal{E}/c + \delta_1\mathcal{E}/c, p + \delta_1 p)$ les quadri-impulsions correspondantes du vaisseau.

Dans cette question, lorsqu'on considère une quantité qui se rapporte au vaisseau, on note δ_1(quantité) sa variation lors du processus de réflexion d'un unique photon (d'où les notations $\delta_1\mathcal{E}$ et $\delta_1 p$ ci-dessus).

(a) Justifier l'écriture choisie pour les deux quadri-impulsions du photon.

(b) Écrire la conservation de la quadri-impulsion totale et en déduire que

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{mc^2}{2}\,\delta_1\Big(\gamma(1+\beta)\Big)\ , \quad \text{où} \quad \beta = \frac{v(t)}{c}\ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{B1}$$

et m est la masse du vaisseau.

3/ Déduire de ce qui précède que l'équation qui gouverne la dynamique du vaisseau se met sous la forme[4]

$$\frac{1}{1-\beta}\,\frac{\mathrm{d}[\gamma(1+\beta)]}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\ , \tag{B2}$$

où τ est une constante homogène à un temps qu'on exprimera en fonction de $\mathcal{P}_\mathrm{e}$ et de l'énergie au repos du vaisseau.

4/ Le membre de gauche de (B2) se met sous la forme $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ où $f(\beta) = \frac{1}{3}(1+\beta)(2-\beta)\gamma/(1-\beta)$. Il sera utile par la suite de noter les propriétés suivantes de f :

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\beta}\right|_{\beta=0} = 1\ , \quad \text{et} \quad f(\beta) \underset{\beta\to 1}{\simeq} \frac{\sqrt{2}}{3(1-\beta)^{3/2}}\ . \tag{B3}$$

(a) Intégrer l'équation (B2) sachant que le vaisseau quitte la Terre avec une vitesse nulle à $t = 0$.

(b) Tracer alors l'allure assez précise de β en fonction de t. On montrera en particulier qu'à petits et grands temps on peut écrire

$$\beta \simeq \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\alpha_0} \quad (\text{lorsque}\ \ t \ll \tau) \quad \text{et} \quad \beta \simeq 1 - \left(\frac{\tau_1}{t}\right)^{\alpha_1} \quad (\text{lorsque}\ \ t \gg \tau)\ , \tag{B4}$$

où α_0 et α_1 sont des réels positifs dont on donnera la valeur et τ_0 et τ_1 sont des constantes homogènes à un temps qu'on exprimera en fonction de τ.

(c) On veut, grâce à un laser de 1 TW (= 10^{12} W !), propulser un vaisseau de 1 tonne jusqu'à des vitesses de l'ordre de c. Discuter, au vu de (B4), la pertinence du dispositif étudié dans ce problème.

5/ On veut re-analyser la partie non-relativiste de la trajectoire : on se place aux temps courts et on fait l'approximation $\beta \ll 1$, et donc $\mathcal{P} \simeq \mathcal{P}_\mathrm{e}$.

(a) Montrer, en utilisant le principe fondamental de la dynamique et en évaluant approximativement l'impulsion échangée durant le choc d'un photon lorsque la vitesse du vaisseau est faible[5], que la force subie par le vaisseau est $F \simeq 2\,\mathcal{P}_\mathrm{e}/c$.

(b) Montrer que c'est cohérent avec l'approximation aux temps courts de (B4).

[4] Pour ce faire, il sera utile de déterminer le nombre de photons reçus par le vaisseau pendant $\mathrm{d}t$.

[5] Dans ce cas, on peut considérer que le vaisseau se comporte vis-à-vis des photons comme un miroir immobile.

Formulaire

- Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux référentiels inertiels. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$.

  (a) Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a

  $$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}\ , \quad \text{avec} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad \text{où} \quad \beta = \frac{V}{c} \ \text{ et } \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ . \qquad \text{(F1)}$$

  Pour inverser la relation entre $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{A}'$ il suffit de changer le signe devant β dans l'expression (F1).

  (b) Lors de ce changement de référentiel les coordonnées des champs électromagnétiques se transforment selon :

  $$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta\, c\, B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta\, c\, B_y) \end{array} \right. \ , \qquad \left\{ \begin{array}{l} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{array} \right. \ . \qquad \text{(F2)}$$

- Une rotation d'angle θ autour de l'axe Ox est représentée par une matrice :

  $$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\ . \qquad \text{(F3)}$$

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\cos(i\alpha) = \cosh(\alpha)$ (attention, $\cos(i\alpha) \geq 1\,!$) et $\sin(i\alpha) = i\sinh(\alpha)$. Noter que l'on a : $\cos^2(i\alpha) + \sin^2(i\alpha) = \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$.