Simon MOULIERAS Stage de Recherche PHYTEM 2ème année

Laboratoire Kastler Brossel
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris

Etude d'un Kicked Rotor quantique presque périodique

Sous la direction de *Dominique Delande* & *Benoît Grémaud*

23 Avril - 31 Aout 2007

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu Dominique Delande et Benoît Grémaud, pour m'avoir accueilli au LKB, dans l'équipe de "Dynamique des Systèmes Coulombiens". Je les remercie de tout cœur, pour leur disponibilité, leur gentillesse, ainsi que pour leurs conseils avisés. Je souhaite également remercier chaleureusement Gabriel Lemarié, et Alexej Schelle, doctorants dans cette même équipe, pour leur aide très utile, et leur bonne humeur. Je remercie Jérôme, François, et Rhita, pour leur soutien, et leur sympathie. Enfin un grand Merci à Bertrand.

Table des matières

Introduction

Le thème du chaos en physique a été abordé pour la première fois par H. Poincaré au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle, puis a suscité un grand intérêt à partir des années 1960, i.e. dès que les ordinateurs ont été capables d'effectuer de gros calculs. Le chaos a une acceptation bien précise : il concerne les systèmes dont la dynamique présente à la fois une forte récurrence, et une sensibilité extrême aux conditions initiales. La mécanique quantique pose le problème suivant : quel serait le comportement d'un système classiquement chaotique en mécanique quantique ? En effet, bien que la notion de conditions initiales soit univoque classiquement, dans le cadre de la mécanique quantique, elle est obscurcie par la relation d'incertitude d'Heisenberg. De plus la notion de trajectoire n'existe plus, et est remplacée par celle d'amplitude de probabilité. L'étude de ce problème est appelé *chaos quantique*.
Un exemple de système démonstratif dans le cadre de cette thématique est le "Kicked Rotor". En effet, les comportements classique et chaotique du Kicked Rotor sont radicalement différents : en mécanique quantique, on assiste à des effets interférentiels qui, selon les symétries du système, sont plus ou moins importants. Le Kicked Rotor, étant un système dont le potentiel est périodique temporellement, ses évolutions classique et quantique sont très éloignées. On peut supposer alors qu'en réduisant l'importance des interférences, on assiterait alors à un nouveau comportement, intermédiaire entre les comportements classique et quantique. C'est là le but de ce stage.
Il est primordial de présenter exhaustivement le Kicked Rotor dans un premier chapitre. Nous nous intéresserons alors à une méthode mise en évidence par H. Schomerus, qui met en jeu des distributions dites de "vols de Lévy". Enfin nous proposerons une solution au problème posé initialement.

Chapitre 1

Le Kicked Rotor

Avant de présenter le travail réalisé durant ce stage, il est impératif d'étudier exhaustivement le Kicked Rotor. Ceci fera l'objet de ce premier chapitre. En particulier nous allons étudier l'évolution temporelle du système, classique dans un premier temps, quantique dans un second.

1.1 Le Kicked Rotor classique

1.1.1 Présentation

Considérons une particule de masse m soumise à une force pulsée dérivant d'un potentiel sinusoïdal de période spatiale Λ. Cette force est pulsée périodiquement tout les T. Le système est étudié ici dans le cas unidimensionnel, c'est à dire que la particule est caractérisée par sa position z ainsi que par son impulsion p. La dynamique du système est donc soumise au Hamiltonien dépendant du temps suivant :

$$\tilde{H}(t) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \cos \frac{2\pi z}{\Lambda} \sum_n \delta(t - nT) \ , \tag{1.1}$$

On peut réaliser expérimentalement un Kicked Rotor quantique en plongeant un atome froid dans un potentiel optique de la forme précédente. Afin d'améliorer la lisibilité des équations, un changement d'échelle est effectué :

- Le temps : $\tau = \frac{t}{T}$
- La position $\theta = \frac{2\pi}{\Lambda} z$ (modulo 2π)
- L'impulsion $P = \frac{2\pi T}{m\Lambda} p$

Cela mène à un hamiltonien s'écrivant :

$$H(\tau) = \frac{P^2}{2} + K\cos\theta \sum_n \delta(\tau - n) \tag{1.2}$$

où $H(\tau) = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2}\tilde{H}(t)$ et $K = \frac{4\pi^2 T}{m\Lambda^2}V_0$ qui est appelé le paramètre de stochasticité. On peut ainsi visualiser le système comme un pendule simple subissant les effets de "kicks" périodiques de gravité :

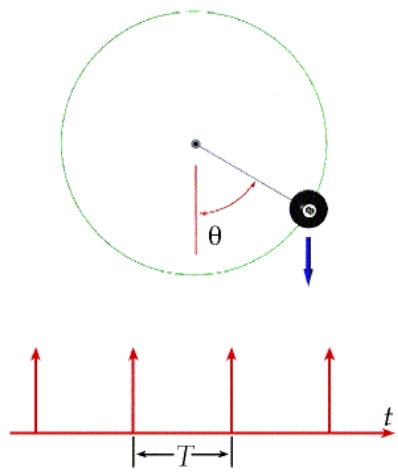

FIG. 1.1 – Schéma du kicked rotor. La gravité est allumée tous les nT.

On peut écrire les equations de Hamilton suivantes :

$$\dot{P} = -\frac{\delta H}{\delta\theta} \tag{1.3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\delta H}{\delta P}\ , \tag{1.4}$$

et les intégrer sur une période :

$$P_{n+1} = P_n - K\sin\theta_n \tag{1.5}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + P_{n+1}\ , \tag{1.6}$$

Ces dernières equations traduisent l'évolution de l'impulsion sous l'effet d'un kick, et celle de la position entre 2 kicks consécutifs. On voit ainsi que l'évolution du système ne dépend[1] que du paramètre de stochasticité K. La nullité de K correspond à un vol libre, mais en l'augmentant, le comportement passe de régulier à chaotique[2].

1.1.2 Diffusion chaotique

Nous avons vu que le Kicked Rotor classique était soumis aux équations 1.5 et 1.6. Penchons nous sur le comportement de $P_n - P_0$ en fonction de n (à savoir en fonction du temps).

$$\Delta P_n = P_n - P_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} K \sin\theta_i \tag{1.7}$$

$$\Delta {P_n}^2 = K^2 \sum_{i,j=0,0}^{n-1,n-1} \sin\theta_i \sin\theta_j \ , \tag{1.8}$$

Comme la dynamique du système est chaotique, on peut supposer que les θ_i sont uniformément répartis sur $[-\pi, \pi]$ et on va de plus supposer qu'ils sont 2 à 2 décorrélés. Moyennons à présent ces deux grandeurs sur un grand nombre de trajectoires, en utilisant l'hypothèse précédente. On obtient :

$$\langle \Delta P_n \rangle = -K \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sin\theta_i \rangle = 0 \tag{1.9}$$

$$\langle \Delta {P_n}^2 \rangle = K^2 \sum_{i,j=0,0}^{n-1,n-1} \frac{1}{2}\delta_{i,j} = \frac{K^2}{2} n \ , \tag{1.10}$$

La dernière équation 1.10 signifie que $\langle \Delta {P_n}^2 \rangle$ croît linéairement avec le temps : n. C'est une diffusion chaotique, dont le coefficient de diffusion vaut $D_{class} = \frac{K^2}{2}$. On peut très facilement réaliser des simulations numériques du système : on itére les équations 1.5 et 1.6, puis on trace $\langle \Delta {P_n}^2 \rangle$ en fonction de n, en moyennant sur différentes conditions initiales. On obtient, pour $K = 10$, la courbe suivante :

[1] Les conditions initiales mises à part.

[2] D'où le nom de paramètre de stochasticité.

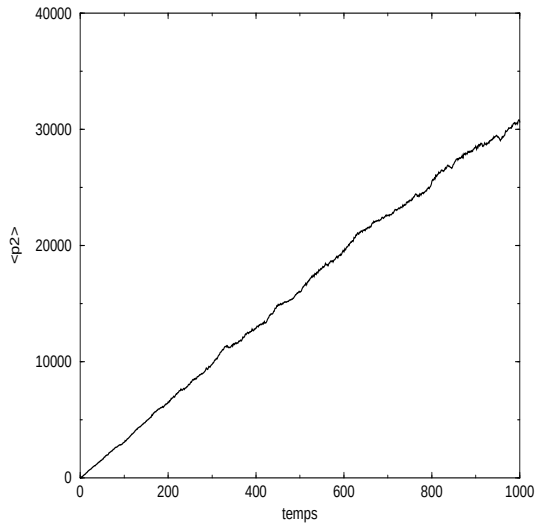

FIG. 1.2 – Diffusion chaotique de $\langle \Delta P_n{}^2 \rangle$ pour $K = 10$, 1000 itérations, 5000 conditions initiales.

On vérifie ici que l'on a effectivement une diffusion, ce qui confirme les hypothèses de repartition uniforme des θ_i et celle de leur décorrélation 2 à 2, émise plus haut afin d'obtenir l'équation 1.10. Néanmoins, on constate que, pour $K = 10$, le coefficient de diffusion D_{class} ne suit pas exactement la relation $D_{class} = \frac{K^2}{2}$ prédite. Un traitement plus précis[3], tenant compte des corrélations temporelles sur la position, montre qu'en réalité, $D_{class}(K)$ oscille autour de la parabole $D_{class}(K) = \frac{K^2}{2}$.

1.2 Le Kicked Rotor Quantique

Nous avons vu que l'approche classique du Kicked Rotor menait à un étalement linéaire (en fonction du temps) de la distribution d'impulsions. Tout naturellement, la question se pose de savoir si l'évolution quantique d'une distribution initiale d'impulsions suit le même comportement.

[3]Bibliographie [1]

1.2.1 Les principes du calcul numérique

Nouvelle équation de Schrödinger

Similairement au traitement de la dynamique classique, on utilise les mêmes renormalisations pour le Hamiltonien quantique que pour le Hamiltonien classique. Le Hamiltonien prend donc une forme similaire à celle déterminée classiquement, à la différence près que les grandeurs observables sont désormais des opérateurs. On obtient donc une "nouvelle" équation de Schrödinger :

$$i\bar{k}\frac{\partial|\Psi_n\rangle}{\partial n} = \hat{H}|\Psi_n\rangle \tag{1.11}$$

dans laquelle $\bar{k} = \frac{4\pi^2\hbar T}{mL^2}$ est interprétée comme une constante de Planck réduite renormalisée[4] et sert donc à mesurer le caractère quantique dy système (comportement quantique lorsque $\bar{k} \gtrsim 1$, et classique lorsque $\bar{k} \to 0$).

L'opérateur d'évolution

Intéressons nous á present à l'opérateur d'évolution sur une période ("1" en unité réduite) : $\hat{U}(n \to n+1)$. La périodicité du Hamiltonien entraîne directement que cet opérateur ne depend pas du temps n. Par définition, on a :

$$|\Psi_{n+1}\rangle = \hat{U}(1)|\Psi_n\rangle \tag{1.12}$$

Et par conséquent, l'évolution d'un état initial ayant été soumis à n kicks s'écrit :

$$|\Psi_{n+1}\rangle = \hat{U}(1)^n|\Psi_0\rangle \tag{1.13}$$

On peut calculer aisément une forme explicite de cet opérateur en décomposant une période en une propagation libre puis un kick. Il suffit alors d'appliquer tour à tour les opérateurs $\hat{U}_{prop}$ (propagation libre) et $\hat{U}_{kick}$ pour faire évoluer un état initial. Durant un temps t, l'opérateur d'évolution libre s'écrit :

$$\hat{U}_{prop}(t) = \exp\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}t \tag{1.14}$$

qui donne, tenant compte des renormalisations :

$$\hat{U}_{prop} = \exp\frac{-i\hat{P}^2}{2\bar{k}} \tag{1.15}$$

[4] que l'on retrouve aussi comme résultat du commutateur des opérateurs positions et impulsions réduites : $[\hat{\theta}, \hat{P}] = i\bar{k}$.

Considérons à présent un kick d'une durée ϵ autour de l'instant 0 et d'intensité $\frac{K}{\epsilon}$. Le Hamiltonien est alors constant entre les instants $-\frac{\epsilon}{2}$ et $+\frac{\epsilon}{2}$. On peut donc écrire que :

$$\hat{U}_{kick}(\epsilon) = \exp\left(-\frac{i}{\bar{k}}\left(\frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{K}{\epsilon}\cos\hat{\theta}\right)\epsilon\right) \tag{1.16}$$

et en faisant tendre $\epsilon \to 0$, on obtient finalement l'opérateur $\hat{U}_{kick}$ pour un kick instantané :

$$\hat{U}_{kick} = \exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}\cos\hat{\theta}\right) \tag{1.17}$$

Ainsi on obtient :

$$\hat{U}(1) = \exp\left(-\frac{iK}{\bar{k}}cos\hat{\theta}\right)\exp\left(\frac{-i\hat{P}^2}{2\bar{k}}\right) \tag{1.18}$$

Le calcul numérique

On peut montrer par un calcul simple que $\hat{H}|P\rangle$ est une combinaison linéaire de $|P\rangle$, $|P+\bar{k}\rangle$ et de $|P-\bar{k}\rangle$, ainsi P n'évolue (au cours du temps) pas continuement, mais discrètement par pas de $\bar{k}$[5]. Cela est dû à la périodicité spatiale du système. Par conséquent, à toute impulsion P on peut associer univoquement une quasi-impulsion q telle que $0 \leq q < \bar{k}$, qui ne changera pas au cours de l'évolution du ket $|P\rangle$. On peut maintenant décomposer un état dans la base des impulsions $|P\rangle = |j, q\rangle = |j\bar{k} + q\rangle$ ou j est entier (On travaille à q fixé, et on moyennera par la suite les résultats sur q, étant donné que les couplages entre "q" différents sont nuls). L'état initial s'écrit alors :

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{j=-L}^{L} a_0(j,q)|j,q\rangle \tag{1.19}$$

Rigoureusement, la taille de la base $2L+1$ devrait être infinie, mais il est possible de la tronquer à une valeur finie à condition que cela n'induise pas d'erreur significative (pratiquement, il faut que $\forall n |a_n(0,q)|^2 \gg |a_n(\pm L, q)|^2$). C'est cette décomposition que le programme utilise pour simuler l'évolution

[5]Il équivalent de dire que le couplage entre 2 état d'impulsion n'est non nul que lorsque leur différence est multiple de $\bar{k}$.

du Kicked Rotor. Dans cette dernière base, l'opérateur $\hat{U}_{prop}$ est diagonal, donc son application revient à une simple multiplication. Il faut ensuite effectuer une transformée de Fourier afin de basculer dans l'espace des positions $|\theta\rangle$ pour que l'operateur $\hat{U}_{kick}$ soit alors diagonal. De cette manière, il est également simple à appliquer. La dernière étape une transformée de Fourier inverse pour revenir dans la base initiale. On a alors fait évoluer $|\Psi_0\rangle$ d'une période complète. Il suffit de répéter ce cycle autant de fois que le nombre de kicks souhaités pour obtenir l'évolution de la fonction d'onde en représentation $|n, q\rangle$. On peut alors calculer la distribution en impulsion $|\langle n, q|\Psi_n\rangle|^2$. Toutefois cette distribution ne correspond qu'à l'évolution d'une seule quasi-impulsion, c'est pourquoi on moyenne ici sur q. Cette moyenne a pour effet de "rectifier" le résultat, tout en abaissant la résolution de la distribution d'impulsions, désormais égale à 1 en $P/\bar{k}$.

1.2.2 La localisation dynamique

Résultats numériques

La simulation numérique effectuée comme décrite au paragraphe précédent donne deux résultats fondamentaux : l'évolution temporelle de $\langle P^2\rangle$ et la distribution finale d'impulsion $|\langle P|\Psi_N\rangle|^2$ fonction de P, ou $|\Psi_N\rangle$ représente la fonction d'onde à la fin de la série de kicks.

La figure 1.3 (a) illustre l'évolution de $\langle P^2\rangle$ en fonction du nombre de kicks. Il est visible que l'élargissement de la distribution d'impulsions se comporte différemment du cas classique. Au temps courts, on assiste à une croissance linéaire en n, comme dans le cas classique (cf figure 1.4), puis, à partir d'un *temps* dit *de localisation* N_{loc}(en nombre de kicks), celle-ci n'évolue plus et ne varie que mollement autour d'une largeur moyenne appelée *longueur de localisation*, définie par :

$$P_{loc} = \sqrt{\langle \Psi_n|\hat{P}^2|\Psi_n\rangle} \tag{1.20}$$

pour $n \gg N_{loc}$. Ce phénomène ,qui se détache clairement du comportement classique, est appelé *localisation dynamique*.

La figure 1.3 (b) met en évidence un deuxième point de divergence avec le cas classique : tandis que, classiquement, la distribution d'impulsions reste une gaussienne, quantiquement, elle adopte (pour un temps dépassant le

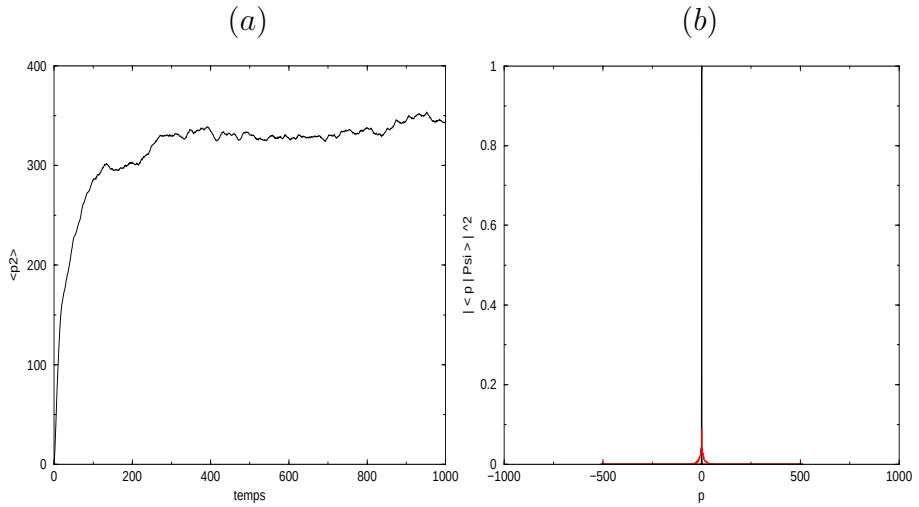

FIG. 1.3 – (a) : Exemple d'évolution quantique de $\langle P^2 \rangle$ déterminée par simulation numérique pour $K = 10$ et $\bar{k} = 2.89$. (b) : Distribution d'impulsions $|\langle P|\Psi_N\rangle|^2$ pour $N > N_{loc}$ en fonction de P en rouge ; Distribution initiale gaussienne en noir.

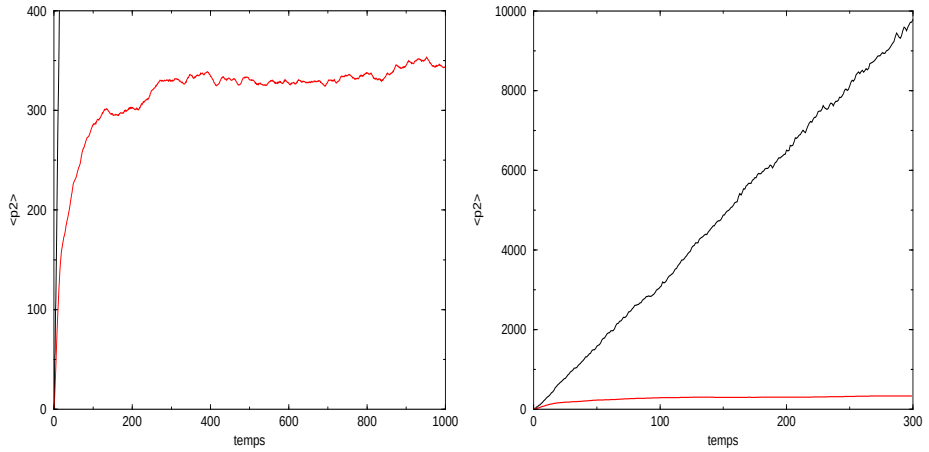

FIG. 1.4 – Comparaison des comportements quantique (localisation dynamique : rouge), et classique (diffusion chaotique : noir). La simulation est réalisée avec $K = 10$, $\bar{k} = 2.89$, 1000 kicks, 500 conditions initiales. On montre deux zooms différents du même graphe afin de mieux constater le rapprochement des deux courbes aux temps courts, et leur éloignement aux temps longs.

temps de localisation) une forme caractéristique : une distribution "double exponentielle" :

$$|\langle P|\Psi_{n\gg N_{loc}}\rangle|^2 \approx e^{-\frac{2P}{P_{loc}}} \tag{1.21}$$

On peut constater ce phénomène en traçant la distribution d'impulsions en échelle semi-logarithmique : La figure 1.5 montre effectivement des pentes

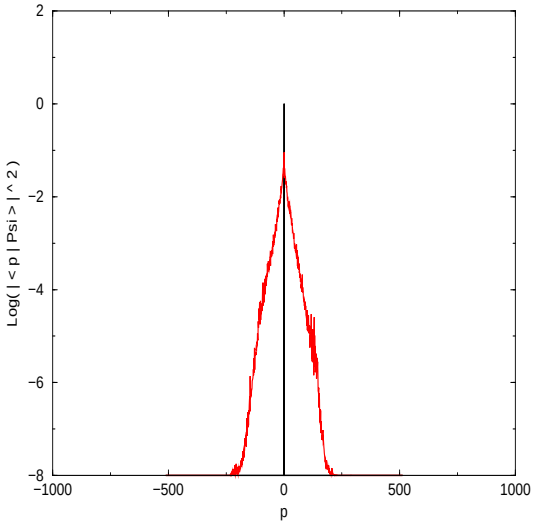

FIG. 1.5 – Distributions d'impulsions en échelle semi-logarithmique : $|\langle P|\Psi_{n\gg N_{loc}}\rangle|^2$ en fonction de P en rouge ; Distribution initiale gaussienne (de largeur 1) en noir.

droites, ce qui correspond bien à la distribution "double exponentielle" prévue précédemment. Nous avons donc vu dans cette dernière partie que les comportements quantique et classique du kicked rotor étaient différents : Après un temps dit de localisation, $|\Psi\rangle$ n'évolue plus, la diffusion est gelée, et la distribution d'impulsion prend une forme de "double exponentielle". Toutefois, une similitude persiste : aux temps courts, l'énergie cinétique moyenne croît linéairement avec le temps, avec le même coefficient de diffusion. Afin de mieux comprendre les deux caractéristiques du Kicked Rotor quantique, nous allons nous appuyer sur le théorème de Floquet.

Interprétation de la localisation dynamique

Dans les systèmes pour lesquels le Hamiltonien est indépendant du temps, la diagonalisation de ce dernier détermine une base d'états stationnaires. L'évolution d'un état initial quelconque s'obtient alors par la décomposition sur cette base. Pour les systèmes dépendant du temps, cette méthode n'est en général pas envisageable. Néanmoins, lorsque le Hamiltonien est périodique, il est possible de définir les états et valeurs propres de l'opérateur d'évolution sur un période et, ainsi de décomposer tout état sur cette nouvelle base. Le théorème de Floquet[6] permet de définir les valeurs propres de $\hat{U}_q(1)$ par l'équation suivante :

$$\hat{U}_q(1)|j(q)\rangle = e^{-i\epsilon_{j,q}}|j(q)\rangle \tag{1.22}$$

où $\epsilon_{j,q} \equiv \epsilon_j$ représentent les quasi-énergies 2π-périodiques, et $|j(q)\rangle \equiv |j\rangle$ les états propres de $\hat{U}_q(1) \equiv \hat{U}$ appelés quasi-états du système. Après n périodes, les quasi-états n'ont donc vu que leur phase évoluer :

$$\hat{U}^n|j\rangle = e^{-i\epsilon_j n}|j\rangle \tag{1.23}$$

Les quasi-états peuvent être déterminés numériquement et on peut constater que les distributions d'impulsions des quasi-états prennent la forme caractéristique des états localisés : une distribution "double exponentielle" centrée sur une impulsion P_j. Ceci n'a pas fait partie de mon travail, néanmoins, il est nécessaire de le savoir pour avoir une bonne approche du problème.

Afin de comprendre le phénomène de localisation dynamique, nous allons regarder de façon analytique l'évolution de la largeur d'une distribution initiale lorsque des kicks sont appliqués. Considérons un état initial du système $|\Psi_0\rangle$ dont la distribution d'impulsion $|\langle P|\Psi_0\rangle|^2$ est une gaussienne de largeur $P_0 = \sqrt{\langle\Psi_0|\hat{P}^2|\Psi_0\rangle}$, centrée sur $P = 0$ et recouvrant quelques quasi-états $|j\rangle$. Après n kicks, on a :

$$\langle P_n^2\rangle = \langle\Psi_n|\hat{P}^2|\Psi_n\rangle = \langle\Psi_0|(\hat{U}^\dagger)^n\hat{P}^2(\hat{U})^n|\Psi_0\rangle \tag{1.24}$$

ce qui donne, après introduction des relations de fermetures sur les quasi-états de Floquet :

$$\langle P_n^2\rangle = \sum_j\sum_k\langle\Psi_0|j\rangle\langle j|(\hat{U}^\dagger)^n\hat{P}^2(\hat{U})^n|k\rangle\langle k|\Psi_0\rangle \tag{1.25}$$

[6]Ce théorème est totalement analogue au théorème de Bloch, valable pour les Hamiltoniens spatialement périodiques. Le théorème de Floquet s'applique aux Hamiltoniens temporellement périodiques.

On applique la formule 1.23 :

$$\langle P_n^2 \rangle = \sum_j \sum_k \langle \Psi_0 | j \rangle \langle k | \Psi_0 \rangle \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle e^{-i(\epsilon_k - \epsilon_j)n} \tag{1.26}$$

Enfin, on sépare la somme pour $k = j$ et pour $k \neq j$:

$$\langle P_n^2 \rangle = \sum_j |a_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle + \sum_j \sum_{k \neq j} a_j^* a_k \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle e^{-i(\epsilon_k - \epsilon_j)n} \tag{1.27}$$

où $a_j = \langle j | \Psi_0 \rangle$ représente le recouvrement de la fonction d'onde initiale avec le quasi-état de Floquet $|j\rangle$. Le premièr terme de l'équation 1.27 ne dépend pas du temps. Le deuxième quant à lui, en tant que somme de termes oscillants à différentes pulsations $\omega_{kj} = \epsilon_k - \epsilon_j$se moyennant à 0, décroît progressivement au cours du temps pour devenir négligeable devant le premier terme. Aux temps longs, l'équation 1.27 devient par conséquent :

$$\langle P_n^2 \rangle = P_{loc}^2 = \sum_j |a_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle \tag{1.28}$$

Rigoureusement, la somme porte sur l'infinité des quasi-états du système, toutefois, les coefficients $|a_j|^2$ nous permettent de restreindre cette somme aux quasi-états non nullement recouverts par $|\Psi_0\rangle$. Appelons l le nombre de ces quasi-états. Cette formule n'est néanmoins valable que si la condition de brouillage est vérifiée : $\forall (j,k)$, $\omega_{kj} n \gg 2\pi$, ce qui équivaut à dire que la diffusion est gelée pour $n \gg N_{loc} = max_{j,k}(\frac{2\pi}{\omega_{kj}})$. Comme les quasi-énergies sont 2π-périodiques, on peut les choisir dans la premiére zone de Brillouin : $[-\pi, \pi]$. Dans ce cas, si on les suppose uniformément réparties dans cet intervalle, l'écart moyen entre 2 quasi-énergies consécutives est $\Delta\epsilon = \frac{2\pi}{l}$. On a donc finalement que :

$$N_{loc} = l \tag{1.29}$$

On obtient finalement, 'a condition que l'état initial recouvre plusieurs quasi-états, que le nombre de kicks minimum pour observer le gel de la diffusion est directement fonction du nombre de quasi-états recouverts par l'état initial (et donc indirectement des constantes du systèmes, contenues dans le spectre des quasi-énergies).

1.3 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons vu et détaillé les comportements classique et quantique du Kicked Rotor. En outre, nous avons constaté que contrairement à la diffusion chaotique caractéristique du système classique, le Kicked rotor quantique voyait la variance de son impulsion localiser, à partir d'un temps dit de localisation. Le calcul de la derniére section montre bien que le gel de la diffusion (qui, aux temps courts, est la même pour les cas classique et quantique) est dû à un effet quantique : des interférences destructives. Ce phénomène se présente comme une conséquence des symétries du systéme : périodicités spatiale et temporelle.

Chapitre 2

Les Vols de Lévy

Comme précisé en introduction de ce rapport, le but de ce stage a été de briser les symétries du système pour réduire les effets d'interférence et détruire la localisation dynamique, sans revenir à une diffusion chaotique. Dans cette optique, l'article de H. Schomerus "*Nonexponential coherence and momentum subdiffusion in a quantum Lévy kicked rotator*"[1] donne une amorce de réponse avec les distributions de "Vols de Lévy". Ceci est l'objet de ce second chapitre.

2.1 Les distributions de Vols de Lévy

Nous allons dans cette première section définir ces distributions, et en exposer les propriétés fondamentales, nécessaires à la compréhension de la suite de ce rapport.

2.1.1 Définition

Les distributions d'entiers sont des fonctions qui, à chaque entier, associent une probabilité de tirage (la loi de Poisson par exemple : $P(n) = e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}$). Parmi ces distributions, les plus utilisées en Physique sont celles qui décroissent rapidement vers 0 à mesure que n grandit, en particulier, celles pour qui la décroissance est suffisament forte pour garantir l'existence des deux premiers moments(dans ce cas, on peut appliquer le Théorème Central Limite). Les distributions dites de "Vols de Lévy" ne présentent pas

[1] Bibliographie [3]

systématiquement cette caractéristique. En effet leur décroissance n'est pas systématiquement assez forte pour pouvoir utiliser le Théorème Central Limite : pour n suffisamment grand, la distribution $P(n)$ est équivalente à $\frac{1}{n^{1+\mu}}$ où μ est un paramètre de la distribution. Par conséquent, les petits entiers gardent une plus forte probabilité de tirage, mais la probabilité de tirer de grands nombre n'est pas du tout négligeable, contrairement aux lois "classiques" comme la loi de Poisson. Donnons un exemple de tirages successifs d'entiers avec une loi de "Vols de Lévy" : 1, 1, 2, 1, 4, 1, 986, 3, 1 ...

2.1.2 Propriétés importantes

Nous allons, dans l'étude qui suit nous restreindre à une loi de "Vols de Lévy" : la distribution de Yule-Simon, définie pour les entiers strictement positifs, dont la formule est :

$$P_\rho(n) = \rho \frac{(n-1)!\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+n+1)} \tag{2.1}$$

où ρ est un paramètre réel strictement positif de la distribution. On peut, en utilisant la formule de Stirling, retrouver le fait que pour n suffisamment grand, $P_\mu(n) \sim \frac{1}{n^{1+\rho}}$, qui confirme bien que la distribution de Yule-Simon est une distribution de "Vols de Lévy". Cette derniére expression nous fait distinguer plusieurs cas :

- Si $0 < \rho \leq 1$ la valeur moyenne de n diverge.
- Si $1 < \rho \leq 2$ la valeur moyenne de n est finie, mais la valeur moyenne de n^2 diverge, de même donc que la variance.
- Si $\rho > 2$ les deux moments existent et sont finis. Dans ce cas, on peut utiliser le Théorème Central Limite habituel.

En particulier, le cas intéressant dans notre problème est le premier : c'est celui qui permet d'observer les phénomènes les plus inhabituels. Plaçons nous donc dans la situation où $0 < \rho \leq 1$. On s'intéresse alors à la somme de Lévy :

$$T_N = \sum_{i=1}^{N} n_i \tag{2.2}$$

où les n_i sont des entiers tirés au sort indépendamment les uns des autres suivant la loi de Yule-Simon. La valeur moyenne des n_i étant infinie, on cherche un équivalent de T_N lorsque $N \to \infty$. Un calcul poussé[2] montre que pour N

[2]Bibliographie [5]

suffisamment grand, $T_N \sim N^{\frac{1}{\rho}}$. On constate, sans surprise, que T_N diverge, et croît plus rapidement que pour des loi "classiques", pour lesquelles $T_N \sim N$. En effet, l'exposant $1/\rho$ est supérieur à 1 pour $0 < \rho \leq 1$.

D'autre part, on s'intéresse à la loi d'arrosage d'une distribution de "Vols de Lévy" : c'est la loi de probabilité de trouver un nombre M en sommant des nombres tirés au sort suivant une certaine distribution (ici, celle de Yule-Simon). La loi d'arrosage ainsi définie, suit la tendance suivante :

$$A(M) = P(T_N = M) \sim \frac{1}{M^{1-\rho}} \tag{2.3}$$

lorsque M est suffisamment grand. La probabilité de "toucher" un nombre M en ajoutant des entiers tirés aléatoirement avec une loi de "Vols de Lévy", est d'autant plus faible que M est grand. On peut également dire que plus M est grand, et plus il a de chance d'être "sauté" par un vol de Lévy. Ceci est particuliérement clair sur la figure 2.1. Cette dernière figure est le résultat de

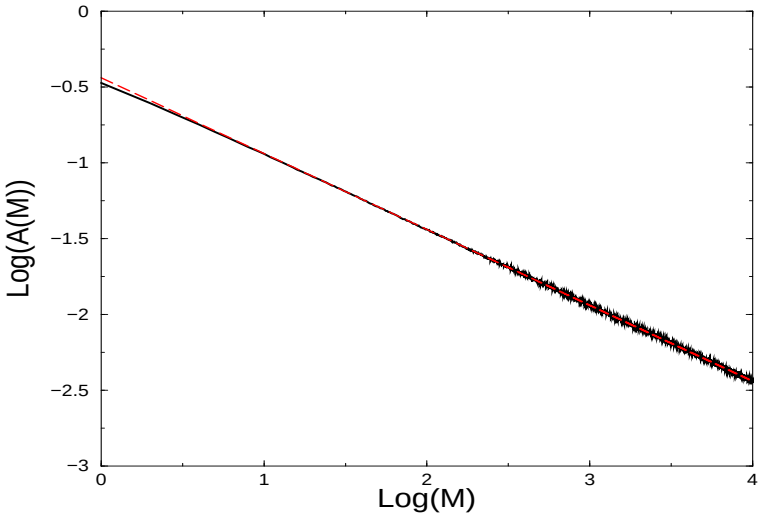

FIG. 2.1 – Simulation numérique de la loi d'arrosage de la distribution de Yule-Simon en échelle logarithmique (en noir). La distribution utilisée est celle de Yule-Simon avec $\rho = 0.5$. La droite en rouge est le résultat de la régression linéaire.

la simulation suivante : On réalise 1000000 séqueces de kicks de 10000 période chacune : On tire au sort un entier n_1 d'après la distribution de Yule-Simon.

Cela signifie que le temps n_1 correspondra à un kick. On tire à nouveau un entier n_2, et ainsi le temps $n_1 + n_2$ correspondra au deuxième kick de la séquence. On réitère l'opération jusqu'à atteindre 10000 (le temps total de la séquence). En ajoutant ces séquences entre elles, puis en normalisant par le nombre de séquences (nombre de conditions initiales), on doit obtenir la loi d'arrosage. On remarque que, comme prévu, on obtient une droite. Une régression linéaire donne une pente de -0.5, qui est le résultat attendu par la formule 2.3.

2.2 L'idée de H. Schomerus

En 2007, Henning Schomerus[3] publie un article titré : "*Nonexponential coherence and momentum subdiffusion in a quantum Lévy kicked rotator*". Il y explique une méthode permettant d'oberver une sous-diffusion du $\langle P^2 \rangle$ du Kicked Rotor quantique[4]. Le changement opéré par rapport au système décrit dans le premier chapitre est le suivant : au lieu soumettre le kicked rotor à des kicks périodique, deux kicks consécutifs seront séparés par un nombre de périodes tiré au sort suivant une loi de Lévy. Une partie de mon travail a été de retrouver ce phénomène par simulations, afin de me familiariser avec les outils numériques. J'ai donc repris le programme du Kicked Rotor écrit par Dominique Delande, pour pouvoir simuler le processus de Schomerus. En voici un résultat typique :

On observe effectivement une forme sous-diffusive, ce qui montre que l'idée de Schomerus est concluante. Essayons à présent d'interpréter plus en profondeur ce phénomène de sous-diffusion.

2.3 Interprétations

L'objectif de ce stage étant d'observer une sous-diffusion[5] de $\langle P^2 \rangle$, causée par la destruction partielle des interférences destructives, il est donc nécessaire de vérifier que le système classique, modifié selon Schomerus, reste diffusif. Ceci montrerait sans équivoque que cette sous-diffusion est pure-

[3]Department of Physics, Lancaster University, Lancaster, LA1 4YB, United Kingdom.
[4]Cela signifie que $\langle P^2 \rangle \propto t^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$.
[5]Ou autre évolution intermédiaire entre localisation et diffusion.

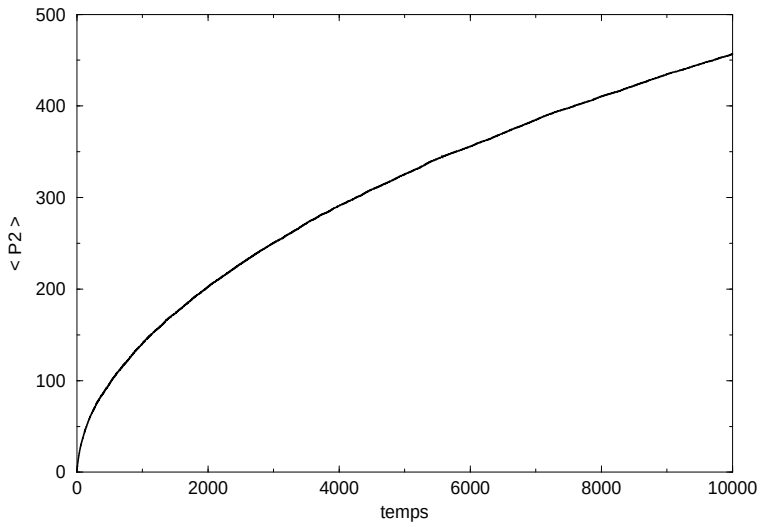

FIG. 2.2 – Evolution temporelle de $\langle P^2 \rangle$ pour le processus de Schomerus.10000 kicks, $K = 10$, $\bar{k} = 2.89$, 2000 conditions initiales, $\rho = 0.5$

ment quantique. La figure 3.4 montre les évolutions classique et quantique du Kicked Rotor modifié selon Schomerus. On remarque que les deux évolutions sont très similaires et que le Kicked Rotor classique n'est plus diffusif. La conclusion est simple : la sous-diffusion "à la Schomerus" n'est pas une sous-diffusion quantique. En revanche, cette idée est une très bonne source d'inspiration pour atteindre le but de ce stage. Avant d'essayer de "rectifier" la proposition de Schomerus pour garder la sous-diffusion du système quantique, et refaire diffuser le système classique, nous allons tenter de comprendre pourquoi le Kicked Rotor classique est sous-diffusif. Reprenons la formule 1.10, qui démontre que le Kicked Rotor classique standard est diffusif, et adaptons-la pour des kicks de Lévy : on remplace K par K_n qui vaut K lorsque n correspond à un kick et 0 sinon. Cela donne :

$$P_{n+1} = P_n - K_n \sin(\theta_n) \tag{2.4}$$

$$P_{n+1}^2 = P_n^2 + K_n^2 \sin^2(\theta_n) - 2K_n P_n \sin(\theta_n) \tag{2.5}$$

K_n étant indépendant à la fois de P_n et de θ_n, la moyenne du second terme peut s'exprimer par le produit des moyennes de K_n et de $P_n sin(\theta_n)$. Ici, les équations sont semblables aux équation du Kicked Rotor original, donc notre système est toujours chaotique, et on peut donc supposer de la même façon

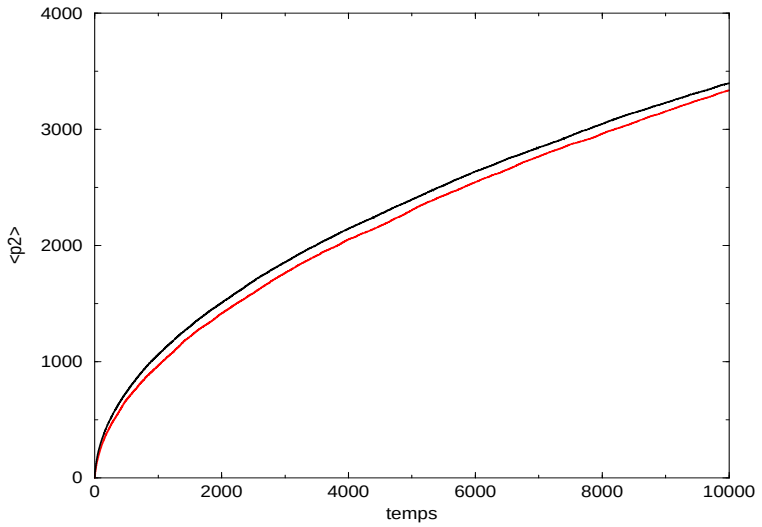

FIG. 2.3 – Evolutions temporelles classique (en noir) et quantique (en rouge) du Kicked Rotor "à la Schomerus". 10000 périodes, $\rho = 0.5$, 5000 Conditions initiales, $\bar{k} = 2.89$, K=10.

que précédemment que les θ_n sont uniformément répartis, et $\langle P_n \sin(\theta_n) \rangle \sim 0$. Si on moyenne maintenant l'équation 2.5, on obtient :

$$\langle P_{n+1}^2 \rangle - \langle P_n^2 \rangle = \frac{\langle K_n^2 \rangle}{2} \tag{2.6}$$

Ici, $\langle K_n^2 \rangle$ représente K^2 que multiplie la probabilité d'infliger un kick au temps n. Donc, d'après la loi d'arrosage des distributions de vols de Lévy (formule 2.3), $\langle K_n^2 \rangle = K^2 \frac{1}{n^{1-\rho}}$ pour n assez grand. Si on suppose que $\langle P_n^2 \rangle \sim n^\alpha$, alors on peut développer le membre de gauche de l'équation 2.6 :

$$\langle P_{n+1}^2 \rangle - \langle P_n^2 \rangle \approx n^\alpha (1 + \frac{1}{\alpha n} - 1) \propto \frac{1}{n^{1-\alpha}} \tag{2.7}$$

La supposition précédente est donc parfaitement compatible avec la loi d'arrosage des lois de Lévy avec la condition que $\alpha = \rho$. La sous-diffusion selon Schomerus n'est donc pas un phénomène quantique, mais bien une conséquence de la pathologie des lois de vols de Lévy. En effet, classiquement, un kick augmente (en moyenne) $\langle P^2 \rangle$ de $\frac{K^2}{2}$. Les kicks ne sont pas assez fréquents pour faire diffuser le Kicked Rotor classique[6]. Le dernier chapitre

[6]cf Annexe : Diffusion compensée.

de ce rapport tente d'apporter une solution à ce problème pour atteindre notre objectif initial : observer une sous-diffusion quantique différente de la dynamique classique.

Chapitre 3

La sous-diffusion quantique du Kicked Rotor

Nous disposons maintenant de tous les éléments pour pouvoir apporter une réponse au problème initial. Ce dernier chapitre va d'abord exposer la méthode utilisée pour pouvoir observer une sous-diffusion quantique, puis les résultats obtenus par simulation, et enfin des interprétations de ces résultats.

3.1 La méthode des "sur-kicks"

La conclusion tirée du chapitre précédent est que la méthode de Schomerus ne présente pas des kicks assez fréquents pour que le Kicked Rotor classique soit diffusif. Il faut donc y remédier tout en conservant le phénomène de sous-diffusion du Kicked Rotor quantique. La solution proposée est la suivante : soumettre le système à une série de kicks périodiques (comme pour le Kicked Rotor standard) d'une intensité K, à laquelle on ajoute une séquence de kicks "à la Schomerus" (i.e. Deux kicks consécutifs sont séparés par un nombre de périodes tiré au sort avec une distribution de Yule-Simon), d'une intensité a différente de K[1]. Sans aucun doute, ce processus aura pour effet de rétablir la diffusion du système classique, puisque seulement quelques kicks (un nombre négligeable devant le nombre de périodes) seront changés par rapport au Kicked Rotor standard (ce qui est vérifié sans problème par simulation). En revanche, nous n'avons, à priori, aucune certitude sur le fait que le comportement de sous-diffusion soit inchangé concernant le système

[1] On appelera ce type de séquence une séquence de "sur-kicks".

quantique. Mais une idée peut nous conforter dans notre choix : des kicks réguliers font localiser le système (à condition, bien sûr, que le nombre de kicks soit supérieur à la longueur de localisation). Si on insère un kick "différent" (par son intensité ou par l'instant où il est donné) une fois le système localisé, on détruit la cohérence quantique induite par les périodicités (spatiales et temporelles). Le système repart alors "à zéro" : il diffuse(en partant de l'impulsion qu'il avait au moment du kick "différent") jusqu'à se relocaliser, ou jusqu'à subir un nouveau kick "différent".
C'est exactement ce qui va se passer si on soumet le Kicked Rotor à notre méthode. De plus, l'écart moyen entre deux "sur-kicks" consécutifs diverge aux temps longs, ce qui implique que les délocalisations seront de plus en plus rares à mesure que n augmente. Si ces dernières avaient été régulières[2], le Kicked Rotor quantique aurait diffusé. Cette idée de délocalisation de moins en moins fréquente au cours du temps nous fait penser qu'un Kicked Rotor ainsi défini a des chances d'adopter un comportement sous-diffusif. Si c'est bien le cas, il nous faudra étudier le comportement du système en fonction de ρ et de a : y a-t-il des valeurs critiques de a en dessous de laquelle la localisation est conservée, au dessus de laquelle on retrouve la diffusion chaotique ? Comment varient ces seuils en fonction de ρ ? Quel lien y a-t-il entre ρ et le paramètre α de la sous-diffusion ?

3.2 Résultats numériques

3.2.1 Premières observations

Un résultat typique obtenu par une simulation numérique est donné en figure 3.1. On constate que la forme des courbes est bien celle attendue, à savoir une sous-diffusion. Le paramètre a croît de bas en haut, avec un pas de 0.5. La courbe noire correspond à $a = 0$: on retrouve bien la localisation du Kicked Rotor quantique standard. La courbe rouge correspond à $a = 0.5$, la verte à $a = 1$ etc ... On observe que plus a est grand et plus la sous-diffusion est prononcée, ce qui est en accord avec la considération qui nous avait poussé à simuler ce processus. Plus a est grand, et plus les kicks "différents" sont "différents", ce qui augmente le coefficient de diffusion lors de la délocalisation.
On peut vérifier par ajustement (de bonne qualité) que ces courbes décrivent

[2]Autrement dit, si on avait utilisé une distribution dont la moyenne est finie.

effectivement des sous-diffusions, à savoir $\langle P^2 \rangle \propto t^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Le même travail a été réalisé pour des séquences de "sur-kicks" données par la loi de Yule-Simon avec un paramètre ρ égal à 0.2, et à 0.8. Qualitativement, le résultat est le même que pour $\rho = 0.5$. Nous devons maintenant étudier quantitativement les variations de α en fonction de ρ et de a.

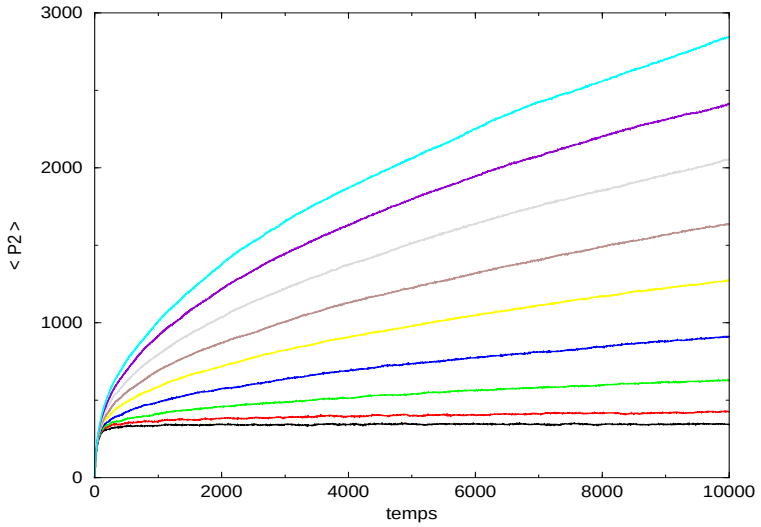

FIG. 3.1 – Evolution temporelle de $\langle P^2 \rangle$. La simulation est réalisée avec 10000 périodes, 1500 conditions initiales, $\rho = 0.5$, $K = 10$, $\bar{k} = 2.89$, et a variant de 0 à 4

3.2.2 Zones de sous-diffusion

Nous allons ici essayer de déterminer un critère de sous-diffusion sur ρ et a, puis nous essaierons de relier α à ces deux paramètres. Sur les courbes obtenues (comme en figure 3.1), nous ajustons des lois de puissance ($f(t) \propto t^\alpha$) avec une excellente précision, afin de déterminer α, et nous pouvons tracer, à ρ fixé, α en fonction de a.

La figure 3.2 nous montre une tendance relativement claire : lorsque a est proche de 0, le système tend à localiser, puis rapidement, la sous-diffusion apparaît. Toutefois son exposant caractéristique n'est pas atteint brusquement dès que a dépasse une certaine valeur : en effet, il croît avec a. Pour des petites valeurs de a, α adopte une évolution quadratique, puis tend rapidement vers ρ. D'autre part, la figure 3.3 montre le comportement classique du

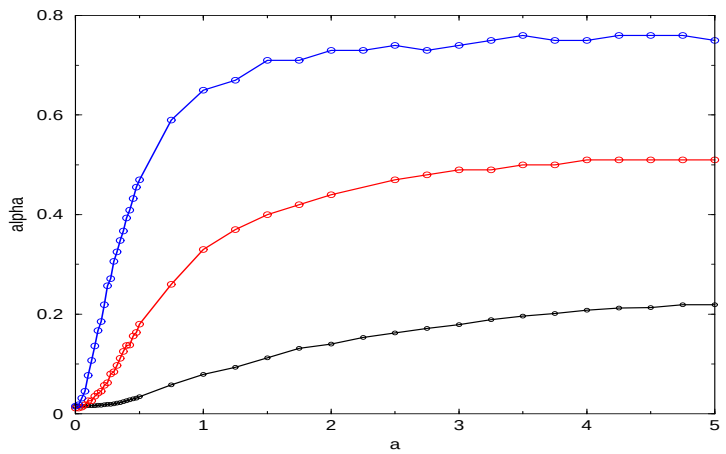

FIG. 3.2 – Variations de α en fonction de a à ρ fixé à 0.2 en noir, 0.5 en rouge, et 0.8 en bleu.

même processus : on trace le coefficient de diffusion classique en fonction de a. On constate que, pour chaqueρ, D_{class} oscille autour d'une parabole, tout comme oscillait le coefficient de diffusion classique du Kicked Rotor standard autour de la parabole d'équation $D_{class} = \frac{K^2}{2}$.

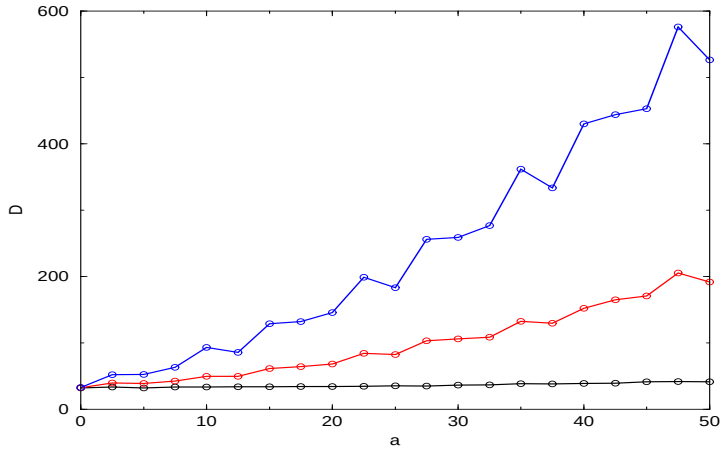

FIG. 3.3 – Variations de D_{class} en fonction de a à ρ fixé à 0.2 en noir, 0.5 en rouge, et 0.8 en bleu.

Un cas important à signaler est le cas où $1 \leq \rho < 2$, la distribution de

Yule-Simon possède alors une moyenne finie. On prédit donc des diffusions pour les systèmes classique et quantique. C'est effectivement ce qui se vérifie numériquement. On trace alors, sur le même graphe les évolutions des coefficients de diffusion classique et quantique en fonction de a, et ceci pour $\rho = 1$ (cf figure 3.4). On constate que pour a fixé, la diffusion classique et plus rapide que la diffusion quantique, et l'écart entre les coefficients de diffusion augmente avec a. On en conclut que, même lorsque $1 \leq \rho < 2$, les effets quantiques se font ressentir.

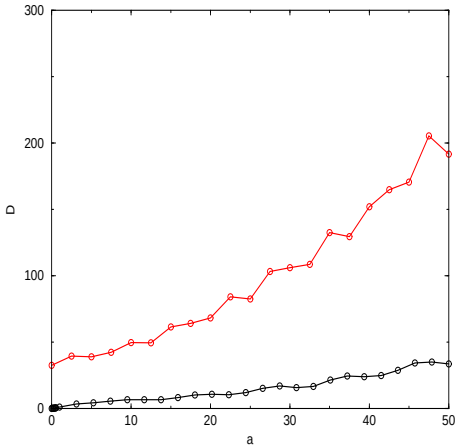

FIG. 3.4 – Variations de D_{class} (rouge) et D_{quant} (noir) en fonction de a avec $\rho = 1$.

3.3 Bilan

Ce chapitre présente une méthode permettant d'observer de la sous-diffusion quantique : le système classique de départ est diffusif, tandis que quantiquement, il est sous-diffusif. Les interférences n'étant ni maximales, ni nulles, la localisation est brisée et l'évolution quantique ne coïncide pas avec la diffusion chaotique du système classique. En résumé, on a :

- Si $0 \leq \rho < 1 \rightarrow$ Sous-diffusion d'exposant α donné par la figure 3.2
- Si $1 \leq \rho < 2 \rightarrow$ Diffusion de coefficient D_{quant} donné par la figure 3.4

Mais dans tous les cas, l'évolution se situe entre la localisation, et la diffusion chaotique adoptée par le Kicked Rotor classique, ce qui était l'objectif initial de ce stage.

Conclusion

Le Kicked Rotor est très étudié dans le cadre du chaos quantique, puisqu'il présente ,classiquement comme quantiquement, des propriétés chaotiques, qui se manifestent différemment à cause des interférences destructives induites par les symétries du système quantique. En modifiant le système original, on a pu mettre en évidence un régime intermédiaire entre localisation dynamique, et diffusion chaotique. Les simulations numériques de l'intuition initiale sont donc concluante. Néanmoins, afin de comprendre le phénomène plus en profondeur, de trouver des expressions analytiques de α en fonction de ρ et a, et enfin de trouver un critére général (pour n'importe quelle séquence de kicks) de délocalisation non-diffusive, il est nécessaire de faire une étude théorique poussée. Cela m'a été totalement impossible, d'abord par manque de temps, mais aussi car je ne dispose pas des outils théoriques nécessaires à cette étude. De plus, ce travail peut servir d'outils dans l'optique d'une réalisation expérimentale du Kicked Rotor sous-diffusif.
Sur un plan personnel, ce stage a été extrêmement enrichissant : tout d'abord grâce à la thématique qui a fait naître chez moi un grand intérêt, également grâce aux résultats encourageant obtenus, et enfin, en dépit de mes lacunes théoriques, grâce aux interprétations qualitatives qui se sont montrées fondamentales dans la progression du raisonnement. Enfin, ce stage donne à l'équipe de "Dynamique des systèmes coulombiens" un travail théorique à poursuivre.

Annexe : Diffusion compensée

Nous revenons ici sur le constat que le Kicked Rotor "à la Schomerus" ne comporte pas suffisamment de kicks pour que le système classique diffuse. En effet, les distributions de vols de Lévy sont tels que $\langle K_n^2 \rangle = K^2 \frac{1}{n^{1-\rho}}$, pour n assez grand. On décide, pour tenter de confirmer cette hypothèse, de changer K_n de manière à ce que $\langle K_n^2 \rangle$ ne dépende plus de n : on va infliger des kicks de plus en plus forts, afin que la décroissance de $\langle K_n^2 \rangle$ due à la faible fréquence des kicks, soit compensée. On pose $K_n = K_n^{\frac{1-\rho}{2}}$. Dans ce cas, et pour n assez grand, l'équation 2.6 devient :

$$\langle P_{n+1}^2 \rangle - \langle P_n^2 \rangle \sim \frac{K^2}{2} \tag{3.1}$$

Ainsi, autant classiquement que quantiquement, on devrait retrouver des diffusions ; le résultat est le suivant : On voit clairement que la prédiction

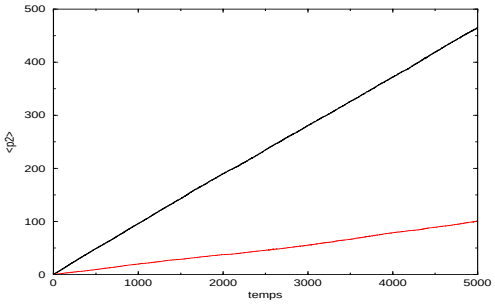

FIG. 3.5 – Evolutions temporelles quantique (rouge) et classique (noir) de $\langle P^2 \rangle$. 50000 périodes, 1500 conditions initiales, $\rho = 0.5$, K=10, $\bar{k} = 2.89$.

est bonne. On peut donc conclure définitivement que la loi d'arrosage des distributions de vols de Lévy est responsable de la sous-diffusion du système classique.

Bibliographie

[1] A. B. Rechester, R.B. White, Calculation of Turbulent Diffusion for the Chirikov-Taylor model, *Physical Review Letters*, **44**, 1586, 1980

[2] Delande, D., Quantum chaos in atomic physics, in *Les Houches Session LXXII, Coherent atomic matter waves*, 1999, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, 415, 2000

[3] H. Schomerus, E. Lutz, Nonexponential Decoherence and Momentum Subdiffusion in a Quantum Lèvy Kicked Rotator, *Physical Review Letters*, **98**, 260401, 2007

[4] D. Brockmann, L. Hufnagel, T. Geisel, The scaling laws of human travel, *Nature*, **10**, 04292, 2006

[5] C. Cohen-Tannoudji, Cours de Physique Atomique et Moléculaire : VI Distributions larges - Lois de Lévy, *Collège de France*, 1995-1996

Résumé

Le Kicked Rotor est un système dont les dynamiques classique et quantique diffèrent radicalement. En effet tandis que le Kicked Rotor classique diffuse, le système quantique est sujet à la *localisation dynamique*. Les effets d'interférences quantiques sont à l'origine de cette différence de comportement. Ils sont causés par la périodicité temporelle du potentiel du Kicked Rotor. Donc, en brisant partiellement cette périodicité, grâce aux distributions larges de "vols de Lévy", on détruit la cohérence quantique, source des interférences, et on trouve un régime intermédiaire entre les régimes diffusif, et localisé : le régime sous-diffusif. On étudie numériquement ce régime, sa source, et ses zones d'existence.

Abstract

Whereas the classical dynamics of the Kicked Rotor despicts a diffusive behavior, the quantum evolution is subjected to the "dynamical localization". This difference is due to subtle interference effects, arising from the periodicity of the kick sequence. Adding Levy noise, we partially destroy this periodicity, and thus, the quantum coherence, resulting in a new behavior : a subdiffusive evolution. Thanks to numerical computation, we investigate this mode, its origin, and the conditions of its existence.