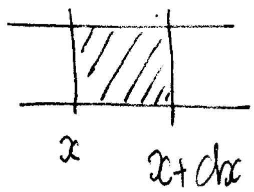
Déchets nucléaires

1/ $\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T \stackrel{\text{ici}}{=} -\lambda \dfrac{dT}{dx} \vec{e_x}$



chaleur entrante (en x) + chaleur créée = chaleur sortante (en $x+dx$)

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_x S dt + \sigma S dx dt = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} S dt$$

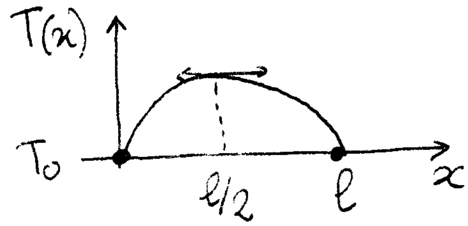
soit $\boxed{\dfrac{d^2T}{dx^2} + \sigma/\lambda = 0}$

$[\lambda] = [J][T]^{-1} L$ et $[J] = [\text{puissance}] L^{-2}$

$[\sigma] = [\text{puissance}] L^{-3}$ donc $\left[\dfrac{\sigma}{\lambda}\right] = [T] L^{-2}$ l'éq. est homogène.

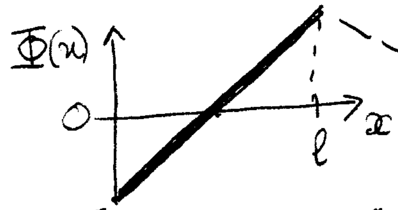
2/ on intègre $\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\sigma}{\lambda} x + K_1$ et $T = -\dfrac{\sigma x^2}{2\lambda} + K_1 x + K_2$

en fixant $T(0) = T(\ell) = T_0$ on détermine K_1 et K_2 $\rightsquigarrow$ $T(x) = \dfrac{\sigma}{2\lambda} x(\ell - x) + T_0$



$T_{max} = T_0 + \dfrac{\sigma \ell^2}{8\lambda} = T_0 + 78\,K = 93\,°C$

$\Phi(x) = S\,J(x) = -\lambda S \dfrac{dT}{dx} = \sigma S (x - \ell/2)$



en $x = \ell$ le flux est également vers l'extérieur ($\Phi > 0$)

en $x=0$ le flux est bien vers l'extérieur ($\Phi < 0$)

la puissance thermique créée au sein du système est évacuée vers l'extérieur par les 2 faces $x = 0$ et ℓ

$\Phi(\ell) = \sigma S \ell/2$ pour $S = 1\,m^2$ cela fait sur la face en $x = \ell$ un flux de chaleur de 0,75 kW au total flux sortant $\sigma S \ell$ = normal

3/ on a toujours la même equa diff. mais ici les conditions au bord sont :
$$\begin{cases} T(0) = T_0 \\ \Phi(\ell) = hS[T(\ell) - T_0] \text{ soit} \\ \left.\dfrac{dT}{dx}\right|_\ell = -\dfrac{h}{\lambda}[T(\ell) - T_0] \end{cases}$$

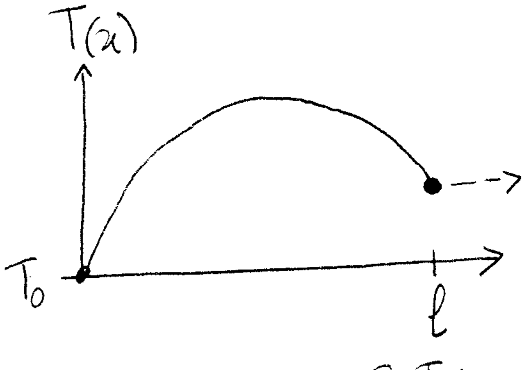
en utilisant les constantes d'intégration k_1 et k_2 :
$$T(x) = -\frac{\sigma x^2}{2\lambda} + k_1 x + k_2$$

on a clairement $k_2 = T_0$ et $-\frac{\sigma\ell}{\lambda} + k_1 = -\frac{h\ell}{\lambda}\left(-\frac{\sigma\ell}{2\lambda} + k_1\right)$

d'où $K_1 = \frac{\sigma\ell}{\lambda}\,\frac{1 + h\ell/2\lambda}{1 + h\ell/\lambda} = \frac{\sigma\ell}{2\lambda} \times \frac{1 + 2\lambda/h\ell}{1 + \lambda/h\ell}$ → ce truc → 1 si $h \to \infty$ et on retrouve $K_1 = \frac{\sigma\ell}{2\lambda}$ comme à la question 2

en écrivant $k_1 = \frac{\sigma\ell}{2\lambda}\left[1 + \frac{\lambda/h\ell}{1 + \lambda/h\ell}\right]$

cela donne $$T(x) = \underbrace{\frac{\sigma}{2\lambda}x(\ell - x) + T_0}_{\text{distrib. obtenue à la question 2.}} + \frac{\sigma\ell}{2}\,\frac{x}{h\ell + \lambda}$$



$\to T_0 + \frac{\sigma\ell^2/2}{\lambda + h\ell} = T_0 + 101\ K = 115\ °C$

on a $\Phi(x) = S\,J(x) = -\lambda S \frac{dT}{dx}$

donc $\Phi(0) = -\lambda S k_1 = -\frac{\sigma S\ell}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{h\ell + \lambda}\right)$ → 0,324

et
$$\Phi(\ell) = hS[T(\ell) - T_0] = hS\frac{\sigma\ell^2/2}{\lambda + h\ell} = \frac{\sigma S\ell}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{h\ell + \lambda}\right)$$

de nouveau $-\Phi(0) + \Phi(\ell) = \sigma S\ell$ (normal!) mais on évacue moins bien la chaleur par la face en $x = \ell$ = normal également

Traction sur un fil

1/ $\delta W = \mathcal{F} dL$

2/ $C_L = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L$ et $l = T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T$

3/ $d(U-TS) = -SdT + \mathcal{F}dL$ (puisque $dU = TdS + \mathcal{F}dL$)

d'où $-\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L}$ par égalité des dérivées croisées

d'après (1) on a : $\mathcal{F} = -\frac{\lambda}{\alpha}(T - T_0) + \frac{L}{\alpha L_0} - 1/\alpha$

donc $\left(\partial \mathcal{F}/\partial T\right)_L = -\lambda/\alpha$

en comparant avec l'expression de l obtenue au (2) : $\rightsquigarrow$ $\boxed{l = +\lambda T/\alpha}$

4/ $\delta Q_{rev} = C_L\, dT + l\, dL$ où $dL = \lambda L_0 dT + \alpha L_0 d\mathcal{F}$ et $l = \lambda T/\alpha$

donc $\delta Q_{rev} = \left(C_L + \lambda^2 L_0 \frac{T}{\alpha}\right) dT + \lambda L_0 T\, d\mathcal{F}$

en comparant avec $\delta Q_{rev} = C_{\mathcal{F}}\, dT + k\, d\mathcal{F}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} C_{\mathcal{F}} - C_L = \lambda^2 L_0 T/\alpha \\ k = \lambda L_0 T \end{array}}$

$$C_{\mathcal{F}} = C_L(T_0, L_0) + \frac{\lambda^2 L_0 T_0}{\alpha} = 3{,}60 + \frac{(24\,10^{-6})^2 \times 1 \times 273{,}15}{5\,10^{-6}} = 3{,}63 \ \mathrm{J.K^{-1}}$$

5/ $dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \frac{C_F}{T} dT + \frac{k}{T} d\mathcal{F}$, $\frac{k}{T} \rightarrow \lambda L_0$

au passage : il n'était pas nécessaire de supposer que $C_{\mathcal{F}}$ est une constante. Il suffisait de supposer $\left(\frac{\partial C_F}{\partial T}\right)_{\mathcal{F}} = 0$ car avec l'expression de dS ci-dessus on a :

$\left(\frac{\partial\, C_F/T}{\partial \mathcal{F}}\right)_T = \left(\frac{\partial\, \lambda L_0}{\partial T}\right)_{\mathcal{F}}$ qui est nul. Donc $\left(\frac{\partial C_F}{\partial \mathcal{F}}\right)_T = 0$.

Et donc $C_{\mathcal{F}}$ est une vraie constante

C_F, λ et L_0 étant des constantes l'expression de dS est facile à intégrer $\Rightarrow$ $\boxed{S = S_0 + C_F \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \lambda L_0 \mathcal{F}}$

$$* \quad dU = \overbrace{TdS}^{\delta Q_{rev}} + \mathcal{F} dL = C_F dT + \underbrace{k d\mathcal{F}}_{\lambda L_0 T} + \mathcal{F} \underbrace{dL}_{\lambda L_0 dT + \alpha L_0 d\mathcal{F}}$$

donc $$dU = C_F dT + \lambda L_0 \underbrace{(T d\mathcal{F} + \mathcal{F} dT)}_{d(\mathcal{F}T)} + \alpha L_0 \underbrace{\mathcal{F} d\mathcal{F}}_{d(\mathcal{F}^2/2)}$$

les coeff. devant les différentielles étant constants cela s'intègre à vue :

$$\boxed{U = U_0 + C_F (T - T_0) + \lambda L_0 T \mathcal{F} + \alpha L_0 \frac{\mathcal{F}^2}{2}}$$

6/ transf. isentropique $\Rightarrow$ $C_F \ln(T_1/T_0) + \lambda L_0 \mathcal{F}_1 = 0$

d'où $T_1 = T_0 \exp\underbrace{\left(-\frac{\lambda L_0 \mathcal{F}_1}{C_F}\right)}_{-6.6\,10^{-4}}$ donc $T_1 \simeq T_0 - \frac{\lambda L_0 \mathcal{F}_1 T_0}{C_F}$

soit un refroidissement de 0,180 K ($\rightarrow T_1 \simeq 273$ K)

7/ C'est l'analogue de Joule-Gay-Lussac. $W = 0$ et $Q = 0$

donc $U = C^{ste} =$

$$U_0 + C_F(T_1 - T_0) + \lambda L_0 T_1 \mathcal{F}_1 + \frac{\alpha L_0}{2} (\mathcal{F}_1)^2 = U_0 + C_F (T_2 - T_0)$$

soit $$T_2 = \underbrace{T_1 + \frac{L_0 \mathcal{F}_1}{C_F} (\lambda T_1}_{\simeq T_0} + \frac{\alpha}{2} \mathcal{F}_1) \rightarrow 0{,}187\text{ K}$$

Donc $T_2 \simeq T_0 + \frac{\alpha L_0 \mathcal{F}_1^2}{2 C_F}$