Du bon usage des mathématiques

Claude Aslangul

(LPTMC - Université Pierre et Marie Curie)

Systèmes désordonnés et processus stochastiques

Colloque en l'honneur d'Alain Comtet

(Institut Henri Poincaré, 14 octobre 2014)

Cher Alain, si nous n'avons pas à proprement parler travaillé ensemble au cours de ces décennies, il nous est arrivé de nombreuses fois de discuter de nos préoccupations de recherche. De surcroît, ayant été souvent dans les mêmes cursus d'enseignement, toi enseignant les maths et moi la Mécanique quantique par exemple, nous avons eu l'occasion d'échanger nos points de vue, presque toujours très proches, sur l'esprit et le contenu de nos cours respectifs, et aussi de partager nos inquiétudes sur l'évolution de cette université à laquelle nous tenons tant.

En toute occasion, j'ai apprécié la finesse et la subtilité de tes jugements, tout autant que ta gentillesse et, pour employer un mot quelque peu passé de mode et trop absent des usages, ton exquise urbanité. Pour toutes ces années, cher Alain, je te suis reconnaissant, et sache que je suis à la fois heureux et honoré de participer à ce colloque organisé en ton hommage et de pouvoir ainsi saluer ta persévérance et ta ténacité au service de la diffusion des vrais savoirs.

1 La relation entre Mathématiques et Physique

Quand il m'a été demandé de participer à ce colloque rassemblant des physiciens et des mathématiciens, en ce lieu d'abord dévolu aux Mathématiques puis également à la Physique – sans parler de l'œuvre scientifique d'Alain où sens physique et rigueur mathématique se marient avec bonheur –, il m'a semblé opportun de rediscuter les relations qui existent entre deux disciplines dont toute l'histoire montre qu'elles se sont mutuellement enrichies et que cet enrichissement réciproque a permis des avancées conceptuelles et techniques de toute première importance.

Je souhaite que l'on me pardonne le titre un peu prétentieux (et provocateur) que j'ai retenu faute de mieux, et dans l'urgence. En préparant cet exposé, je me suis dit que *Du bon enseignement des Mathématiques pour physiciens* aurait été plus approprié. Quoi qu'il en soit, il ne s'agit évidemment pas ici de donner des leçons ou de rappeler à l'ordre qui que ce soit, mais de revenir brièvement sur une part de ce qui à la fois rapproche et distingue deux pans essentiels de la connaissance. La plupart de ces réflexions, fort banales au demeurant, sont de fait inspirées principalement par mon expérience d'enseignement des Mathématiques pour les étudiants en Physique et devant des publics très divers (ENS, Université), qui a forgé ma conviction que tout cours de cette sorte devrait être précédé d'une sorte de mise en abyme rappelant comment ces deux constructions intellectuelles sont incrustées l'une dans l'autre.

On assiste trop souvent à des joutes oratoires ou écrites entre *des* représentants des deux communautés, les uns se faisant les gardiens du temple de la rigueur, les autres revendiquant un pragmatisme échevelé autorisant les premiers à des jugements parfois fort peu aimables[1]. Je pense qu'il n'y a en réalité ni divorce ni même contentieux, pas plus qu'il ne peut exister de hiérarchie, de primauté ou de prérogatives[2] entre deux sciences qui se revendiquent comme telles. Tout indique que les différends qui surviennent résultent exclusivement de malentendus sur les objectifs poursuivis et sur une incompréhension du contexte dans lequel les démarches des uns et des autres sont effectuées. De surcroît, les exemples[3] ne manquent pas où ce que firent d'illustres mathématiciens en leur temps pourrait être qualifié d'hérétique ou d'absurde par d'autres qui, des décennies après, ont contribué à clarifier des subtilités ayant échappé à leurs prédécesseurs, lesquelles n'avaient cependant pas empêché ces derniers d'être, d'une certaine façon, dans la vérité – ceci sans parler de ce que Poincaré appelle[4] le *malentendu entre géomètres et astronomes "au sujet de la signification du mot* convergence*"*, ou de ce que le génie pur autorise dans une sorte de défi au savoir académique constitué[5].

Si la tentation d'opposer Mathématiques et Physique – ou au moins de de les cantonner à deux univers disjoints – est indéniablement illégitime, il y a bien pire : ce serait une absurdité que de vouloir écarter deux mondes faits l'un pour l'autre, et on se priverait de progrès décisifs dans la connaissance,

---

[1]Deux citations, laissant délibérément leurs auteurs dans l'anonymat pour ne rallumer aucune querelle : *"I think the Feynman path integral may be regarded as a great mathematical mistake"* et *"L'état-major suprême du généralissime Bourbaki décida de frapper un coup décisif en montant une opération de grande envergure contre un objectif militairement mal protégé en même temps que symboliquement capital : la fonction δ"*.

Il n'est d'ailleurs pas très difficile de trouver des jugements nettement plus outrés... Par exemple : *"Mais c'est lorsqu'on aborde les théories mathématiques qui sont à la base de la mécanique quantique que l'attitude de certains physiciens dans le maniement de ces théories confine véritablement au délire. [...] On se demande ce qui peut rester dans l'esprit d'un étudiant lorsqu'il a absorbé cette invraisemblable accumulation de non-sens, une véritable"bouillie pour les chats" ! Ce serait à croire que les physiciens d'aujourd'hui ne sont à l'aise que dans le flou, l'obscur et le contradictoire."* Jean Dieudonné, "De la communication entre mathématiciens et physiciens", dans "La Pensée Physique Contemporaine", S. Diner, D. Fargue et G. Lochak, éds., (Editions A. Fresnel, Hiersac 1982).

[2]Les formules d'Arnold, *"Les mathématiques font partie de la physique. [...] Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher"* et de Feynman *"Physics is to mathematics like sex is to masturbation"* doivent être prises pour ce qu'elles sont : des aphorismes.

[3]Pour n'en citer qu'un : le calcul par Stokes du développement de la fonction d'Airy $\mathrm{Ai}(x)$. À ce sujet, voir l'analyse de Frédéric PHAM, *"Du vieux et du neuf sur les séries divergentes"*, Colloque Émile Borel, juillet 1999.

[4]Henri POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Gauthier-Villars, Paris, 1892)

[5]Que l'on se souvienne des mots de Hill à la lecture des carnets de Ramanujan, notamment lorsque celui-ci affirme avoir démontré que la somme des entiers naturels est égale à $-\frac{1}{12}$ (*"M. Ramanujan est tombé dans l'abîme du sujet, ô combien ardu, des* séries divergentes*"*) ; sans aucune formation académique avérée, Ramanujan avait réussi à prolonger $\zeta(z)$ en-deçà de $\Re z = 1$. La puissance et l'utilité de la régularisation zeta en Physique ne sont plus à démontrer (pour un exposé récent, voir la thèse de Nicolas M. ROBLES, *Zeta Function Regularization*, Imperial College London, 2009).

comme en témoignent mille exemples jalonnant l'histoire des sciences, de Galilée[6] affirmant en substance que les Mathématiques sont le langage de la nature à Jean Perrin qui, par une préscience visionnaire, contribua à réconcilier Poincaré avec les fonctions sans dérivées grâce à ses observations sur le mouvement brownien. D'ailleurs, dans une vision plus fine des choses, et se souvenant de ces mots de Louis Pasteur *"Il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais de sciences appliquées, il n'y a que des applications de la science"*, on peut aussi se demander si la distinction courante entre Mathématiques *pures* et *appliquées* est réellement fondée, tout comme celle entre Physique fondamentale et appliquée.

Affirmer que les Mathématiques imprègnent toutes les sciences est d'une extrême banalité, toute modélisation quantitative reposant sur la formalisation, sans parler des théories physiques de l'époque moderne, de l'Élasticité à la Mécanique quantique ou la Théorie quantique des champs, dont l'édification aurait été impossible sans le recours à des concepts ou des outils très puissants – comme l'analyse complexe et ces nombres qui n'ont plus rien d'*imaginaires* puisqu'ils sont la matière première des théories fondant notre compréhension du monde à toutes les échelles où elles s'appliquent[7]. Il est remarquable que les grands principes de la Physique y trouvent une expression naturelle et lumineuse : il en va ainsi du principe de causalité qui impose des propriétés analytiques remarquables aux fonctions de réponse d'un système, quelle qu'en soit la nature.

Mais il y a plus : au-delà de la formalisation déductive qu'elles permettent et des outils qu'elles mettent à disposition, les Mathématiques jouent aussi le rôle de juges de paix pour trancher entre des hypothèses spéculatives. Que l'on pense par exemple à l'importance de la symétrie en Physique relayée par la puissance de la Théorie des groupes autorisant à poser, presque *ex nihilo*, les fondements des théories physiques : malgré ses imperfections, l'équation de Dirac en fournit un superbe exemple.

2 Le rôle de l'expérience

Toutefois, la démarche du mathématicien et celle du praticien des mathématiques, toutes deux instinctivement guidées par l'intuition, sont de nature très différente en conséquence obligée des objectifs poursuivis par l'un et l'autre. Il peut arriver que, malgré les apparences, la formulation d'une "même" question ne traduise pas la même interrogation, faute d'employer des concepts ou des termes dénués de toute ambiguïté. Qu'il s'agisse des sciences exactes ou humaines, la description des phénomènes doit se référer à une méthodologie fondée sur l'expérience qui, partant des observations, conduit à l'énoncé de *lois* ayant le statut de *principes* à partir desquelles toute théorie, ou tout modèle théorique, peut se construire et se développer ; à une époque donnée, une théorie est considérée comme exacte si, une fois avérée sa cohérence interne, elle n'est contredite par aucun fait

[6] *"Il libro della natura e' scritto coi caratteri della Geometria."*

[7] Sur l'extraordinaire pertinence des Mathématiques pour les développements des sciences, on ne saurait trop recommander la lecture de l'article définitif de Wigner : Eugen Paul WIGNER, *"The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences"*, Comm. Pure App. Math., **13**, 1 (1960).

expérimental, sa fécondité se situant réellement dans son aptitude à prévoir de nouveaux phénomènes non encore observés. On peut dire que la prévision théorique d'un effet inconnu jusqu'alors, la suggestion d'une expérience permettant de l'observer ... et son observation de fait constituent le menu royal du physicien.

Le mathématicien introduit et manipule des concepts sans se soucier de leur mise à l'épreuve expérimentale au sens usuel, et pour cause : la plupart d'entre eux sont par nature inaccessibles à l'expérience[8]. La notion d'infini (même le plus petit d'entre eux, $\aleph_0$, cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels), la notion de nombre irrationnel, ..., ne sauraient faire l'objet d'une vérification expérimentale, et c'est ce qui a tant troublé les Anciens, les Grecs notamment : on aura beau remplacer la diagonale d'un carré de côté de longueur unité par une succession d'un très grand nombre de petits segments formant un escalier autour de la diagonale, la somme des longueurs des segments formant l'escalier sera toujours strictement égale à 2, alors que la diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$ – c'est aussi pourquoi il est impossible de tracer le graphe de la fonction de Cantor ou de celle de Dirichlet. En la circonstance, ce qui est irréalisable expérimentalement, c'est l'opération que le mathématicien appelle *passer à la limite*. Il n'en reste pas moins que jouer au jeu de fléchettes n'est pas un *remake* des expériences de Rutherford !

Si la notion d'infini échappe à l'expérience, il en va de même de la notion de zéro. Sauf s'il s'agit d'une conséquence d'une loi de conservation fondamentale (celle de la charge électrique, par exemple), et de la symétrie sous-jacente, on considère comme nul (et non avenu) tout effet se situant en-deçà des capacités observationnelles. En Physique notamment, il en va ainsi pour certaines grandeurs : si on déclare *nulle* la masse du photon ou la charge du neutron, c'est d'une part parce que les théories construites avec ces hypothèses sont, jusqu'à présent, en accord avec l'expérience, d'autre part parce que l'on a pu trouver expérimentalement des bornes supérieures incroyablement petites [9]. De même, dans la construction d'un modèle, on déclare (plus ou moins explicitement) que certains effets sont négligeables, ce qui revient à les annuler strictement, c'est-à-dire, en fait, à n'en point parler : il n'est pas exagéré de dire que tout l'art du physicien est de construire les (bons) modèles pour rendre compte des observations.

Sur un plan plus général, on peut d'ailleurs se poser la question de la *pertinence* physique d'une singularité mathématique, laquelle, justement, résulte toujours d'une opération de limite à l'infini (sommation d'une *série*,...), ou extrapolation à la valeur nulle. Si elle reste réelle et indéniable au plan conceptuel, on ne doit pas oublier qu'elle se situe au-delà de toute observation pratique et que, de ce fait, elle est plutôt du domaine de la Métaphysique. Bien sûr, tout comme lorsqu'il pose l'équation de Newton écrite sous forme *différentielle*, le physicien est

[8] S'agissant de prouver la véracité d'une propriété fonction du cardinal $N \in \mathbb{N}$ d'un certain ensemble, on peut faire l'expérience avec un ordinateur, qui examine systématiquement les valeurs successives de N. Aussi puissant que soit l'ordinateur, il ne pourra jamais considérer qu'un nombre maximum $N_{\max}$, *fini*, ne démontrant pas que la propriété est vraie quel que N puisqu'il existe une *infinité* d'entiers.

[9] Pour la masse du photon, la borne supérieure expérimentale actuellement admise est environ 10^{-52} kg. Quant au neutron, sa charge totale réputée nulle ne doit pas dissimuler le fait qu'il possède une structure de charge (l'atome aussi est de charge nulle !).

fondé à prendre la limite thermodynamique alors que tout système macroscopique est forcément de taille finie : c'est l'extrapolation sensée et réfléchie qui lui permet le cas échéant d'identifier un point critique en tant que singularité d'une fonction de partition, étant entendu que l'on n'observera jamais expérimentalement la divergence logarithmique de la chaleur spécifique dans le modèle d'Ising à deux dimensions.

3 L'importance des échelles en Physique

L'une des démarcations les plus indiscutables entre l'univers d'un observateur du monde sensible et celui du mathématicien tient sans doute au fait que le premier a *toujours* à sa disposition des *échelles* pour les grandeurs pertinentes du problème considéré ; pour la Physique, ce sont les échelles de temps, de longueur, d'énergie, etc., fixées autant par la nature du système à décrire que par les fondements des théories établies, et c'est relativement à elles, et uniquement à elles, que se situent le zéro et l'infini à proprement parler. L'intrusion inévitable des échelles permet d'admettre l'idée que ce qui est vrai pour le physicien ne l'est pas forcément pour le mathématicien. De l'hypothèse de Riemann (*"Tous les zéros non-triviaux de la fonction de Riemann sont sur la droite…"*), le matheux ne dira pas qu'elle est vraie puisqu'elle n'est pas encore démontrée ; en revanche, tout physicien travaillant dans les bonnes unités avec des nombres $\lesssim 25$ millions la considérera comme exacte. Même pour une science dite *exacte*, la vérité peut être toute relative.

Pour la physique atomique, la taille de notre galaxie est réellement "infinie", cependant que pour les phénomènes se situant dans le domaine d'énergie de l'électron-volt, le noyau atomique peut être considéré comme sans structure interne, et donc ponctuel[10] (de rayon nul). Au contraire, pour l'astrophysicien qui étudie l'univers à grande échelle, notre galaxie est un objet "microscopique", alors que pour l'expert en *gluons* et *quarks*, ce noyau est à lui seul un véritable univers. De même, le temps de (quasi-) récurrence d'un système macroscopique est exponentiellement grand, mais toujours fini : c'est pourquoi on énonce le Second Principe, légitimé par le fait qu'un intervalle de temps $\sim 10^{10^{23}}$ fois l'âge de l'univers est réellement *insensé*, tout comme l'infini au sens commun est et restera toujours hors de portée. Enfin, la relaxation d'un système relativiste macroscopique de volume V implique inévitablement une échelle de temps $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{c}V^{1/3}$ prenant en compte la vitesse *finie* c de propagation des interactions – temps qu'un ingénieur va déclarer *nul* s'il s'agit de construire une machine à vapeur !

La notion d'échelle est reliée à celle de *résolution*, au sens large, ne serait-ce qu'en raison de la précision limitée de tout appareil de mesure, lequel donne accès à des valeurs dont on peut seulement dire – sauf dans un cadre quantique[11] – que chacune se trouve dans un certain intervalle, petit mais *fini*, communément appelé *barre d'erreur*.

[10] L'ordre de grandeur du "rayon" des noyaux est le Fermi, soit 10^{-15} m.

[11] La raison de cette exclusion tient à ce que, pour une grandeur *quantifiée*, une mesure dont la précision est meilleure que l'écart entre cette valeur (approchée) et les deux valeurs voisines peut être déclarée *infiniment* précise vis-à-vis de la théorie en vigueur !

Toute théorie ou modèle possède ainsi, inéluctablement, ses limites intrinsèques. En ce qui concerne plus particulièrement la Physique, son horizon est *toujours* à distance finie : de nos jours, s'il l'est c'est parce que gravitation et théorie quantique ne sont pas réunifiées, rendant le physicien aveugle au-delà des échelles de Planck [12] entièrement fixées par les seules constantes fondamentales et sur simple analyse dimensionnelle. Pour tout problème, elles constituent des "infiniment petits/grands" incontournables bornant inférieurement/supérieurement toute autre échelle propre au problème considéré, et toujours disponibles pour la justification.

Ce sont ces distinctions qui permettent de légitimer une approche pragmatique des mathématiques, où l'introduction de certains concepts en tant que résultats de passage à la limite au sens du mathématicien n'est pas toujours indispensable compte tenu de la nature de la réalité à décrire, et ne s'impose que par pure commodité technique. L'exemple le plus patent est sans doute la notion de *distribution*, nécessaire en toute rigueur pour la formalisation de l'Électrostatique, laquelle pourtant n'a pas dû attendre (heureusement !) les années 1950 pour trouver son achèvement, et pour la Mécanique quantique ce qui n'a pas empêché Dirac de formuler l'Électrodynamique quantique dès 1928. Le bien-fondé de cette utilisation intuitive des mathématiques repose sur l'hypothèse que le physicien n'a pas perdu la raison, rassuré par la certitude que s'il fait des bêtises, il va trouver des âneries ! Ainsi, la "fonction" de Dirac, couramment utilisée en Électricité, en Traitement du signal, en Mécanique quantique, etc., n'est que l'idéalisation conceptuelle d'une vraie et bonne fonction $\delta_\varepsilon(x-x_0)$ de largeur ε très fine, d'intégrale unité, et qui, associée à une fonction $f(x)$ à variation *lente* à l'échelle $\Delta x \gg \varepsilon$, extrait précisément la valeur de la fonction au point de concentration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_\varepsilon(x-x_0)\,\mathrm{d}x \;\simeq\; f(x_0) \quad . \tag{1}$$

Cela étant, point vraiment besoin de connaître la théorie des distributions pour écrire l'égalité approchée (1), qui devient exacte dans la (bonne) limite $\frac{\varepsilon}{\Delta x} \to 0$ et constitue alors *la* règle opérationnelle de la fonction de Dirac $\delta(x-x_0)$. Dans le même ordre d'idées, à propos des séries de Fourier, on connaît l'égalité autour du peigne de Dirac :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = 2\pi \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta(x-2p\pi) \quad , \tag{2}$$

qui joue un rôle central dans les problèmes de diffraction (condition de von Laue, équivalente à la condition de Bragg $n\lambda = 2d\sin\theta$), acceptable sans aucune réserve en raison du nombre macroscopique de diffuseurs, $\sim 10^{20}$, dont le gigantisme est responsable d'une largeur angulaire pour chaque dent du peigne de l'ordre de 10^{-20} radian, autant dire zéro.

Cela dit, il reste que la théorie des distributions peut être d'un grand secours pour le physicien en lui fournissant les outils pour effectuer en toute

[12] Le temps de Planck est $\tau_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^5} \sim 3\times 10^{-43}$ s, la longueur de Planck est $l_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^3}$, voisine de 9×10^{-35} m ; quant à l'énergie de Planck $E_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar c^5/G}$, elle est de l'ordre de 4×10^8 J, soit à peu près 2.5×10^{18} GeV...

quiétude certaines régularisations, et savoir que faire d'objets "non définis" apparaissant en conséquence d'un traitement désinvolte en amont ; par exemple, c'est cette théorie qui permet d'écrire[13] :

$$\text{“}\int_0^1 x^{-3/2}\,\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} - 2\text{”} \tag{3}$$

les guillemets étant là pour rappeler le caractère subtil de l'égalité qui pourrait scandaliser à première vue.

Autre exemple : le concept de fonction périodique. Pour le mathématicien, cette notion est définie sans ambiguïté : $f(t)$ est T-périodique s'il existe un réel[14] T tel que $f(t+T)=f(t)$. Sitôt posée, cette affirmation implique que la fonction f est non nulle de $t=-\infty$ à $t=+\infty$, ce qui est une pure vue de l'esprit : si t est le temps, toute fonction représentant un phénomène réel est forcément de durée limitée, les fonctions décrivant la réalité n'étant ainsi jamais *stricto sensu* périodiques. Néanmoins, celle égale à $\sin(2\pi t/T)$ si $0 \leq t \leq \tau$ et nulle ailleurs sera considérée comme périodique si sa durée τ est très longue par rapport à T (autrement dit, on a le temps de compter un grand nombre d'oscillations). De façon plus quantitative, sa transformée de Fourier sera considérée comme quasi-monochromatique, occasion justifiée de renouer avec la fonction de Dirac $\delta(\omega \pm \omega_0)$, avec $\omega_0 T = 2\pi$, idéalisation raisonnée d'une fonction très fine $\delta_{\delta\omega}(\omega \pm \omega_0)$, avec $\delta\omega \sim \tau^{-1}$. Si $\delta\omega$ est très petit devant la résolution en pulsation disponible (expérimentalement ou en raison des limites du modèle), celle-ci constitue une échelle autorisant des manipulations formelles rapides, dont il faut cependant garder en tête le caractère symbolique.

Un dernier exemple. L'équation de Newton :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} \tag{4}$$

n'a jamais été démontrée par personne. La seule chose avérée (expérimentalement !) est que si l'on fait des mesures entre deux instants t et $t+\delta t$, la trajectoire polygonale construite par la succession des points discrets mesurés s'inscrit sur la courbe continue différentiable (*i.e.* lisse, sans rugosité) déduite de (4). Bien sûr, la technologie aidant, on sait diminuer δt, mais il sera toujours *fini*, dans toute expérience, et ne sera jamais le $\mathrm{d}t$ du mathématicien. Si le physicien recourt à la forme limite (4), c'est juste parce qu'il sait intégrer les équations différentielles, et qu'il est beaucoup plus simple techniquement de procéder ainsi plutôt que de faire les calculs plutôt laborieux avec des accroissements finis[15]. C'est aussi et surtout parce qu'aucune expérience n'est venue démentir (4) au sens où, à partir d'un δt trop petit, les points expérimentaux se seraient écartés de la ligne continue déduite de (4). Si un jour on découvre qu'il faut discrétiser temps et

[13] Israel Moiseevich GUELFAND et Georges E. CHILOV, *Les distributions*, Tome 1 (Dunod, Paris, 1962)

[14] Il existe évidemment des fonctions périodiques dont la période est un nombre complexe. La restriction n'est ici avancée que pour la pertinence physique de l'argument.

[15] ... ce que l'on fait toujours, en revanche, quand on utilise une procédure de résolution, ou de simulation, numérique.
À l'inverse, il arrive aussi que des fonctions non dérivables surviennent en Physique, par exemple dans le mouvement Brownien (les trajectoires browniennes n'ont pas de tangente !), ou dans la physique des systèmes désordonnés (escaliers du diable).

espace[16] en-dessous de certains δr et δt, alors il faudra – au moins à ces échelles – renoncer à des écritures différentielles comme celles employées dans (4).

La notion de limite semble bien ainsi être l'un des concepts au sujet duquel les univers du mathématicien et du physicien se recouvrent sans se superposer : si le second peut passer à la limite sur le papier pour faciliter un développement formel, empruntant ainsi un *concept* défini par le premier, il sait aussi qu'en cas de difficulté, un retour en arrière est toujours possible. Notamment, on sait bien que l'*ordre* des limites peut être d'importance puisqu'il peut conditionner le résultat (et ce n'est pas une question seulement destinée à piéger un taupin !) ; lorsque tel est le cas, et sachant que la réponse à un problème physique bien posé doit être unique, cet ordre est dicté par la *réalité* des choses. Des exemples connus sont la transition ferromagnétique[17], où les deux limites sont $N \to +\infty$ et $\mathcal{B} \to 0$, le coefficient de réflexion sur une marche de potentiel variant rapidement sur la longueur l, pour laquelle les deux limites $\hbar \to 0$ et $l \to 0$ ne commutent pas non plus[18], ou encore la limite classique et la limite de température nulle ; dans ce dernier cas, le bon paramètre est un rapport du genre $\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}$, et il est bien clair que cette quantité peut être zéro ou l'infini selon que l'on fait tendre T vers zéro avant $\hbar\omega$, ou l'inverse.

4 L'alternative discret *vs* continu

Avant de préciser de quoi il s'agit – et sans en revenir au débat sur l'atomisme ! –, je me dois de renvoyer à la belle conférence[19] donnée par Alain à l'ENS en 2006 où cette question est analysée et discutée en profondeur.

La notion de *limite*, familière au mathématicien et pragmatiquement maîtrisée par le physicien, renvoie aussi à l'alternative discret/continu qui désigne la possibilité de représenter les grandeurs pertinentes soit par des variables variant continûment, soit par des variables parcourant un ensemble de points isolés. Il est bien connu, et c'est une pratique courante, que l'analyse d'une même question peut naviguer d'un modèle discret à une description continue, en fonction

[16] Ce que semblait penser Schrödinger, lui qui écrivit :

> *"Nous ne devons pas admettre la possibilité d'une observation continue. Les observations doivent être considérées comme des événements discrets, disjoints les uns des autres. Entre elles il y a des lacunes que nous ne pouvons pas combler"*

(*Physique quantique et représentation du monde*, Coll. *Points Sciences*, S78, Éd. du Seuil, Paris, 1992).

Si de tels quantums d'espace et de temps existent, ils sont en-deçà de toutes les capacités actuelles d'observation.

[17] Pour la transition ferromagnétique, on dispose de scénarios théoriques justifiant la bonne procédure de limite à considérer : en présence d'un champ magnétique *fini*, aussi petit soit-il, le temps de basculement d'un domaine augmente exponentiellement avec le nombre N de spins ; à la limite $N \to +\infty$, la moitié de l'espace des phases devient inaccessible (*brisure d'ergodicité*, voir par exemple : Nigel GOLDENFELD, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison - Wesley Publishing Co, Reading, 1992)).

[18] Walter APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens* (H & K Éditions, Paris, 2002), Claude ASLANGUL, *Mécanique quantique, tome I*, 2ᵉ édition (De Boeck, Bruxelles, à paraître), problème 15.6.21.

[19] Alain COMTET, *"Le continu et le discret dans les théories physiques"*, disponible à l'adresse http://www.diffusion.ens.fr/index.php?idconf=1052&res=conf

de la commodité technique ou pour se conformer à l'obligation de respecter les principes[20]. L'emploi d'une description ou de l'autre doit évidemment être inspiré par les échelles physiques pertinentes qui, une fois encore, permettent de distinguer ce qui est "infiniment" petit de ce qui ne l'est pas, mais peut aussi servir de levier pour en revenir à des questions fondamentales comme par exemple le fit Schrödinger à la fin de sa vie en posant la question de savoir si, dans l'obligation systématique de confrontation expérimentale, on devait persister à représenter temps et espace par des grandeurs *continues*.

Ainsi, c'est par référence à la situation expérimentale que, le cas échéant, on s'autorise à formaliser une même grandeur par une variable discrète ou au contraire continue – les modèles sur réseau rencontrés en Mécanique statistique ou en Théorie des champs en témoignent. Pour une source radioactive jeune et macroscopique, considérer le nombre de noyaux actifs comme une variable continue n'est pas déraisonnable puisque 1 est un "infiniment petit" comparé au nombre d'Avogadro. L'intensité dans un circuit électrique est écrite comme la dérivée $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, alors que la charge électrique est *quantifiée* et qu'au contraire la dérivation est un processus de *limite* où les accroissements tendent vers zéro. Enfin, le nombre 1 est tout petit quand il est la différence de deux nombres quantiques égaux chacun à des milliards de milliards (d'où la limite – asymptotique – classique de la Mécanique quantique), la même "approximation" valant pour un démographe qui étudie la dynamique de populations composées d'un très grand nombre d'individus, ou un biologiste qui modélise la prolifération de bactéries.

Si les descriptions discrète et continue donnent souvent des résultats de même nature, il convient toutefois de rappeler qu'il n'en va pas toujours ainsi, et de loin. Un cas d'école bien connu est celui des équations différentielles d'ordre 2 (ou plus), ou d'EDO non-linéaires dès le premier ordre, qui peuvent donner lieu à l'émergence de singularités *spontanées*, invisibles sur l'équation elle-même et de surcroît *variables* avec une condition auxiliaire (initiale). Il en va ainsi pour l'équation $f' = f^2$ dont la solution générale est $f(z) = \frac{f(0)}{1-zf(0)}$, $f(0)$ étant la valeur par ailleurs prescrite de f à l'origine ; remarquer que la simple considération de l'équation ne permet nullement de soupçonner que $z = 1/f(0)$ est un point remarquable ! N'étant pas détectable sur l'équation différentielle elle-même, une telle singularité est dite *spontanée*. À la réflexion, cette *invisibilité* n'a d'ailleurs rien de surprenant puisque la position de la singularité dépend de la condition initiale alors que l'équation différentielle elle-même, définie en soi, ignore superbement celle-ci. Noter enfin que la dépendance d'une singularité vis-à-vis d'une condition initiale renvoie à des questions assez fondamentales, et notamment à la difficulté de toute prévision quand, justement, la condition initiale n'est pas *parfaitement* connue – ce qui est toujours le cas en pratique.

Citons un autre exemple spectaculaire montrant à quel point les univers discret et continu peuvent être différents. L'équation $f' = f^2 - f$, $f(0) = 2$, a pour solution $f(z) = \frac{2}{2-\mathrm{e}^z}$, qui diverge en $z_0 = \ln 2$. D'un autre côté, l'équation aux différences $a_{n+1} = a_n^2$ s'écrit aussi $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n$ et a une parenté manifeste avec l'équation différentielle précédente ; pourtant, ses solutions sont $a_n = 2^{2^n}$ et sont *finies* quel que soit n ! Ici, la solution discrète est régulière (sauf à l'infini),

[20] Par exemple, dans une description continue en temps, l'usage inconsidéré de la fonction de Dirac peut conduire à des violations du principe de causalité.

alors que sa cousine continue a des comportements singuliers – mais l'inverse peut aussi se produire : que l'on pense à l'exotisme de l'application logistique comparée à la banalité du problème de Verhulst posé en terme de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN - bN^2$.

Ces exemples peuvent légitimement déclencher quelque inquiétude, car les équations (en particulier les non-linéaires) sont le plus souvent insolubles analytiquement : l'obligation de recourir à un calcul numérique sur ordinateur (pour lequel la discrétisation est une nécessité incontournable) permet de suspecter d'avance de grandes difficultés pour ne pas dénaturer le problème posé et en trouver bel et bien les solutions pertinentes. En la matière, un immense savoir-faire est clairement de rigueur, et il est essentiel de procéder à des analyses locales des solutions qui permettent de trancher dans le vif si la machine fournit des solutions suspectes, voire délirantes.

Puisqu'il est brièvement question de calcul numérique, mentionnons juste pour la rappeler une autre grave difficulté : la fidèle représentation des nombres en machine. Si l'on s'en tient à vouloir frapper les esprits, il suffit de citer un très bel article de J.-M. Müller[21] et en particulier l'analyse faite par cet auteur de la relation de récurrence $x_{n+1} = 111 - \frac{1\,130}{x_n} + \frac{3\,000}{x_n x_{n-1}}$. Avec son crayon et sa gomme[22], on peut montrer que pour une infinité de couples de valeurs de départ (par exemple $x_0 = 2$ et $x_1 = -4$), la suite des nombres x_n a pour limite $x_\infty = 6$, ce point fixe étant *stable*. D'un autre côté, la programmation naïve de cette itération donne immanquablement le point fixe 100... qui est *instable...*. Comme le dit l'auteur de l'article *"on observe parfois en machine une bonne et rapide convergence vers un résultat totalement faux"*.

5 En guise de conclusion

Les considérations précédentes visent aussi à rappeler que l'intuition, ou ce que l'on appelle le *sens physique* (qui souvent se confond avec le sens *commun*), ne doit jamais être absente même s'il s'agit d'employer le langage formel des Mathématiques, "pures" ou non, et d'utiliser des méthodes dont le bien fondé fait appel à des notions assez avancées. L'intuition n'est pas une donnée statique (quand elle est innée) et se doit d'être développée, quitte au prix de quelque perplexité toujours féconde : il n'est pas anodin de découvrir que, même quand apparemment tout n'est que nombres réels, ce sont des singularités fort loin de $\mathbb{R}$ qui déterminent les aspects essentiels de tel ou tel problème, quand elles ne traduisent pas un principe physique fondamental (la causalité pour n'en citer qu'un).

Autre exemple : s'agissant des transformations intégrales les plus courantes, il est éclairant d'expliquer comment et pourquoi la transformation de Fourier s'impose pour les régimes forcés alors que c'est celle de Laplace qui doit être

[21] Jean-Michel MULLER, *"Ordinateurs en quête d'arithmétique"*, La Recherche, **278** (numéro spécial sur la Théorie des nombres), p. 772, (juillet-août 1995)

[22] Claude ASLANGUL, *Des mathématiques pour les sciences*, tome 2, problème 16.10 (De Boeck, Bruxelles, 2013).

privilégiée quand il est question de la relaxation d'un système. De la même façon, il est important de se borner à invoquer la simple homogénéité pour passer immédiatement de $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ à $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ (a réel positif), quitte à pousser l'analyse en montrant comment le résultat se prolonge dans le cas où $a\in\mathbb{C}$.

On éviterait bien des tracas à nos étudiants en leur expliquant en quoi l'oscillateur harmonique *non amorti* est une vue de l'esprit et pourquoi les constantes d'intégration sont absentes dans le traitement cavalier par la transformée Fourier. C'est aussi avec ce banal système mécanique – en réalité le plus simple concevable – que l'on peut montrer comment la partie principale de Cauchy est le moyen le plus naturel (le plus physique ?) pour barrer la route à des difficultés techniques rebutantes mais totalement artificielles, n'étant que la conséquence impitoyable du traitement désinvolte d'un problème physique (mal) posé.

Éviter les tracas ou les tourments intellectuels est une chose ; mettre aussi nos étudiants à l'abri de déboires en est une autre, pas moins importante. C'est pourquoi il me semble essentiel aujourd'hui de les sensibiliser à la question toujours délicate du calcul avec une machine, qu'il soit numérique ou formel, et ceci d'autant plus qu'il n'est pas rare d'entendre professer des injonctions fort audacieuses prétendant qu'apprendre à nos étudiants comment se débrouiller face à une équation différentielle ou une intégrale est complètement *has been* au motif que les machines savent le faire... quand elles savent ! C'est au contraire en découvrant les subtilités de l'intégration la plus banale ou la richesse des équations les plus simples qu'ils sauront non seulement développer une intuition indispensable pour baliser la route lors d'une analyse non triviale mais aussi et surtout être en mesure de maîtriser l'efficacité de ces *merveilleuses machines calculantes* afin d'éviter les att(m)errissages en catastrophe.