Produits de matrices aléatoires et systèmes désordonnés

Yves Tourigny
University of Bristol
en collaboration avec Alain Comtet, Jean–Marc Luck et Christophe Texier

IHP, 14 octobre 2014

L'exposant de Lyapunov

- Produits de matrices:

$$\Pi_n := M_n M_{n-1} \cdots M_1 \,.$$

$$M_i \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{R}) \;\text{ i.i.d. de loi } m \,.$$

- L'exposant de Lyapunov: Pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\gamma(x) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\ln |\Pi_n x| \right) \,.$$

Bellman (1954), Furstenberg & Kesten (1960), Furstenberg (1963).

La formule de Furstenberg (cas 2×2)

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad z = \frac{x_1}{x_2}, \quad \mathcal{M}(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$\gamma = \int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} m(\mathrm{d}M) \int_{\mathbb{R}} \ln \frac{\left| M \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right|} f(z)\,(\mathrm{d}z)\,.$$

where

$$f(z) = \int_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} m(\mathrm{d}M) \left(f \circ \mathcal{M}^{-1} \right)(z) \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}^{-1}}{\mathrm{d}z}(z)\,.$$

Dyson (1953), Letac–Seshadri (1983), Chamayou–Letac (1991).

Modèle d'Anderson

$$-\psi_{n+1} - \psi_{n-1} + V_n \psi_n = E\psi_n \,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

- Produit de matrices:

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \,, \quad M_n := \begin{pmatrix} V_n - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln |\psi_n|}{n} \,.$$

- Variable de Riccati: $z_n = \psi_n / \psi_{n-1}$,

$$z = V_1 - E - \cfrac{1}{V_2 - E - \cfrac{1}{V_3 - E - \cdots}}$$

Peter Lloyd (1969), Bougerol et Lacroix (1985), Carmona et Lacroix (1990).

Modèle pour un produit plus general?

- Decomposition d'Iwasawa:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{w} & 0 \\ 0 & e^{-w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

- Equation de Schrödinger

$$-\psi'' + V(x)\psi = E\psi \, .$$

Relier le produit de matrices à un modèle physique afin de développer l'intuition et de permettre des calculs.

Modèle de Kronig–Penney

- Kronig–Penney (1931):

$$V := \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta_{x_i}$$

$$\theta_i := x_i - x_{i-1}\,.$$

Solution:

$$\begin{pmatrix} \psi'(x_{n+1}-) \\ \psi(x_{n+1}-) \end{pmatrix} = M_n M_{n-1} \cdots M_1 \begin{pmatrix} \psi'(x_1-) \\ \psi(x_1-) \end{pmatrix}$$

où

$$M_i = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(k\theta_i) & -\sin(k\theta_i) \\ \sin(k\theta_i) & \cos(k\theta_i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un modèle supersymétrique

- **Définition formelle**:

$$V = W^2 - W'$$

où

$$W := \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta_{x_i} .$$

- **Produit de matrices**:

$$\begin{pmatrix} \psi'(x_{n+1}-) \\ \psi(x_{n+1}-) \end{pmatrix} = M_n M_{n-1} \cdots M_1 \begin{pmatrix} \psi'(x_1-) \\ \psi(x_1-) \end{pmatrix}$$

où

$$M_i = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(k\theta_i) & -\sin(k\theta_i) \\ \sin(k\theta_i) & \cos(k\theta_i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{w_i} & 0 \\ 0 & e^{-w_i} \end{pmatrix} .$$

- **Interprétation probabiliste**: Posons

$$\psi(x) = e^{-\int W\,dx}\,v(x)\,.$$

Alors

$$\mathscr{G} v := \frac{1}{2} v'' - W\,v' = \underbrace{\lambda}_{-E/2}\,v\,.$$

$\mathscr{G}$ est le générateur d'une diffusion avec sauts.

- **"Impureté double"**

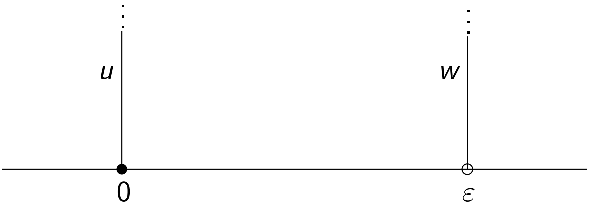

Figure: Une interaction delta au voisinage d'une interaction supersymmetrique

Modèle à interactions généralisées

On considère le produit des matrices

$$M_i = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(k\theta_i) & -\sin(k\theta_i) \\ \sin(k\theta_i) & \cos(k\theta_i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{k} & 0 \\ 0 & \sqrt{k} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{w_i} & 0 \\ 0 & e^{-w_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_i} .$$

où

- Distribution des espacements: $\theta_i \sim \mathrm{Exp}(p)$ i.i.d.
- Distribution des B_i: i.i.d.

Ceci détermine la loi m des M_i.

L'équation de Riccati: $z := \psi'/\psi$

$$z' = -(z^2 + E)\,, \quad x \notin \{x_i\}\,.$$

$$z(x_i+) = \mathscr{B}_i\left(z(x_i-)\right)\,.$$

Puisque les espacements sont exponentiellement distribués, et les B_i i.i.d, $\{z(x)\}_{x>0}$ est Markovien. Sa densité $f(z)$ satisfait

$$(z^2 + E)\, f(z) + p\, \mathbb{E}\left(\int_z^{\mathscr{B}^{-1}(z)} f(t) dt \right) = N\,.$$

N est la densité d'états.

Objets clés

- L'exposant complexe:

$$\Omega(E) := \gamma(E) + \mathrm{i}\pi N(E)\,.$$

- Transformée de la densité:
  - Interactions delta (pas de w_i): Fourier (Halperin, 1965).
  - Interactions supersymétrique (pas de u_i): Mellin.
  - Limite continue: Hilbert.

Quelques cas solubles

Densité de θ	Densité de u	Densité de w	Fonction spéciale
$\delta(\theta - 1/p)$	$\frac{q/\pi}{q^2+u^2}$	$\delta(w)$	—
$p\,\mathrm{e}^{-p\theta}$	$q\,\mathrm{e}^{-qu}$	$\delta(w)$	Whittaker
$p\,\mathrm{e}^{-p\theta}$	$q^2 u\,\mathrm{e}^{-qu}$	$\delta(w)$	Whittaker
$p\,\mathrm{e}^{-p\theta}$	$\delta(u)$	$q\,\mathrm{e}^{-qw}$	Gauss
$p\,\mathrm{e}^{-p\theta}$	$\delta(u)$	$q\,\mathrm{e}^{-2q\lvert w\rvert}$	Gauss généralisée
Limite continue			Gauss

Matrices proches de l'identité

- On considère

$$M = \Theta\, W\, U$$

avec

$$\theta = \overline{\theta} + \delta\theta\,, \quad w = \overline{w} + \delta w\,, \quad u = \overline{u} + \delta u$$

où

$$\overline{\theta} := \mathbb{E}(\theta)\,, \quad \delta\theta = \theta - \overline{\theta} \ \text{ et } \ D_{\theta\theta} = \mathbb{E}\left(\delta\theta\, \delta\theta\right)$$

and so on for the other variables. Les paramètres du désordre, supposés petits, sont

$$\overline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \overline{\theta} \\ \overline{w} \\ \overline{u} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \boldsymbol{\sigma}^2 := \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta w} & D_{\theta u} \\ D_{w\theta} & D_{ww} & D_{wu} \\ D_{u\theta} & D_{uw} & D_{uu} \end{pmatrix}.$$

Diffusion de Riccati

- On part de

$$\mathbb{E}\left(\int_z^{\mathcal{M}^{-1}(z)} f(t)\,dt\right) = N\,.$$

et on développe

$$\begin{aligned}\xi(\theta, w, u) &:= \int_z^{\mathcal{M}^{-1}(z)} f(t)\,dt \\ &= [f(z)\mathscr{D}_\Theta z]\;\delta\theta + [f(z)\mathscr{D}_W z]\;\delta w + [f(z)\mathscr{D}_U z]\;\delta u + \\ &\qquad \text{termes quadratiques} + \cdots\end{aligned}$$

- On trouve

$$Q(z)f'(z) + P(z)f(z) = N\,.$$

f est la densité stationnaire d'un processus de diffusion Z.

Systèmes à plusieurs canaux

- $V(x)$ une matrice $d \times d$ symétrique.
- Interactions représentées par des matrices $\mathrm{Sp}(2d, \mathbb{R})$.
- $\psi(x, E)$ une matrice $d \times d$ de solutions telle que $\psi(0, E) = 0$ et $\psi'(0, E) = I$.

$$\Omega(E) := \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \psi(x, E)}{x} .$$

$$\psi'(x, E) = Z(x, E)\psi(x, E) .$$

La relation entre Z et $\ln \psi$ est compliquée par la non-commutativité des matrices.